Алгоритмы и структуры данных

Кратчайшие пути

CS Center, Новосибирск

Кратчайшие пути

- Длины рёбер $l: E \to \mathbb{R}$
  - $dist(s, t) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
- Стоит избегать циклов отрицательного веса

- Часть кратчайшего пути – кратчайший путь
  - Иначе можно заменить на другой, более короткий путь

- Single-source shortest path
  - $d: V \to \mathbb{R}$, $d[v] \geq dist(s, v)$
  - Релаксация relax(x, y):
    - $d[y] \leftarrow \min(\, d[y], d[x] + l(x, y)\,)$
  - Начальные значения initialize:
    - $d[\, s\,] \leftarrow 0$, $d[\, v \neq s\,] \leftarrow +\infty$

Алгоритм Форда-Беллмана

- Релаксируем |V| раз

```
initialize
for i ∈ [0 : |V|)
    for e ∈ E
        relax(e)
```

- Сложность: O(|V||E|)
- Детектирует отрицательные циклы
- $d_0 \rightarrow d_1 \rightarrow d_2 \dots d_{|V|}$
- $d_k[\, v \,] \leq \min\{\, l(path) \mid path{:}s \rightarrow v,\ |path| \leq k \,\}$

All pairs shortest path: алгоритм Флойда

- $d[\,i\,][\,j\,] \geq dist(i, j)$
- initialize
  - $d[\,i\,][\,j\,] \leftarrow 0$, $i=j$
  - $d[\,i\,][\,j\,] \leftarrow l(i, j)$, $(i, j) \in E$
  - $d[\,i\,][\,j\,] \leftarrow +\infty$
- relax(i, k, j)
  - $d[\,i\,][\,j\,] \leftarrow \min(\, d[\,i\,][\,j\,], d[\,i\,][\,k\,] + d[\,k\,][\,j\,]\,)$

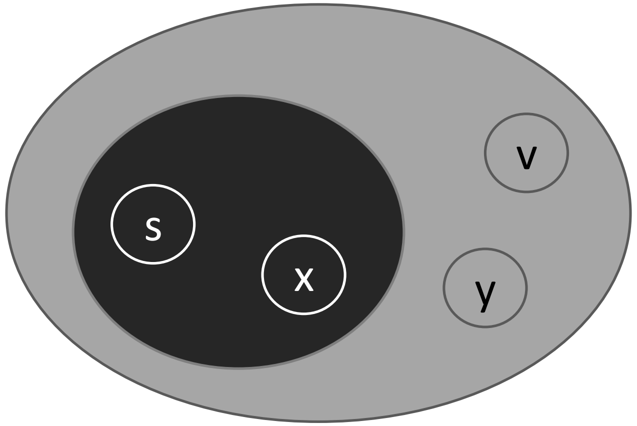
```
for k ∈ V
    for i ∈ V
        for j ∈ V
            relax(i, k, j)
```

- Сложность: $O(|V|^3)$
- На итерации k:
  - $d[\,i\,][\,j\,] \leq \min\{\, l(path) \mid path: i \to j, (p \in path) \leq k \,\}$
- База индукции: $k=0$
- Индукционный переход:
  - $path: i \to j$, $k \in path$
    - $l(path) = l(path_1: i \to k) + l(path_2: k \to j)$
      - $p \in path_1 < k$
      - $p \in path_2 < k$

Алгоритм Дейкстры

- Нет рёбер отрицательной длины
- d[v]; c[v] ∈ {W, G, B}
- c[v]=B => d[v] = dist(s, v)

```
initialize
c[ s ] ← G
for i ∈ [0 : |V|)
    v = argmin{ d[ v ] | c[ v ]==G }
    c[ v ] ← B
    for (v, u) ∈ E
        relax(v, u)
        if c[ u ]==W
            c[ u ] ← G
```



v=argmin{ d[v] | c[v]=G }

- Пусть d[v] > dist(s, v)
  - тогда есть путь p = (s, ... x, y, ... v), l(p) < d[v]
    - c[x] = B, c[y] = G
  - d[v] ≤ d[y]
  - d[y] ≤ d[x] + l(x, y)
    - l(p) < d[v] ≤ d[x] + l(x, y)
      - противоречие с отсутствием отрицательных рёбер

Алгоритм Дейкстры

- Сложность:
  - без специальных структур данных: $O(|V|^2)$
- Куча для нахождения минимума:
    - Размер кучи $|V|$
    - Извлечение ключа $|V|$ раз
    - Добавление или уменьшение ключа $|E|$ раз
  - бинарная куча: $O(|E|\log|V|)$
  - k-ичная куча:
    - $O(|E|\log_k|V|+|V|k\log_k|V|)$
    - $k = |E|/|V|$
      - Сложность в $\log(|E|/|V|)$ раз меньше, чем для бинарной кучи
  - куча Фиббоначи: $O(|E|+|V|\log|V|)$

Алгоритм Дейкстры

- Длина пути не обязательно сумма
- Свойства путей, достаточные для работы алгоритма:
  - длина монотонно неубывает вдоль пути
    - $p_1 : x \to y$
    - $p_2 : y \to z$
    - $l(p_1 p_2) \geq l(p_1)$
  - оптимальность для подзадач
    - $p_1 : x \to y$
    - $p_2 : x \to y$
    - $p_3 : y \to z$
    - $l(p_1) \leq l(p_2) \Rightarrow l(p_1 p_3) \leq l(p_2 p_3)$