Алгоритмы и структуры данных

Потоки в сетях

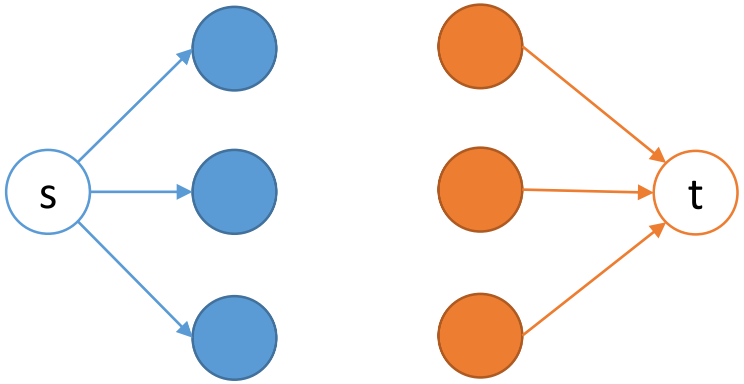
CS Center, Новосибирск

Определение потока в сети

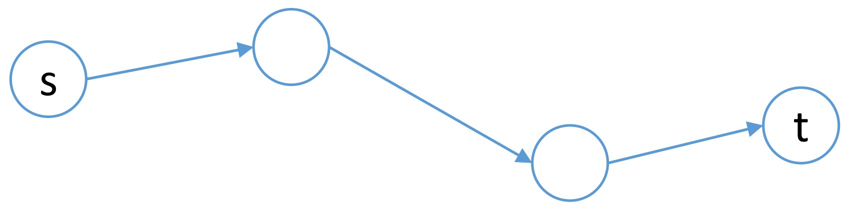
- Сеть – это граф $G = (V, E)$ с заданной пропускной способностью рёбер $c: E \to \mathbb{R}_+$
  - Заданы вершины s, t – источник и сток
- Поток – функция $f: E \to \mathbb{R}_+$
- Условия на поток в сети:
  - Для всех e: $f(e) \le c(e)$
  - Для всех v кроме s и t: $div_f(v) = 0$
    - $div_f(v) = \Sigma_u f(uv) - \Sigma_w f(vw)$
- Величина потока $|f| = -div_f(s) = div_f(t)$
- Задача: $|f| \to \max$

Максимальные паросочетания

- Двудольный граф
  - Выбрать максимальное множество рёбер
    - Для каждой вершины не более, чем одно ребро
  - Задача сводится к задаче о макс. потоке



Остаточная сеть



- Для каждого ребра e
  - добавляем обратное ребро «-e»
  - $c(-e) = 0$
- Поток – функция $f\colon E \to \mathbb{R}$
  - $f(e) \le c(e)$
  - $f(e) = -f(-e)$
  - $v \notin \{s, t\} \Rightarrow \Sigma_u f(vu) = 0$
- Пусть f – текущий поток
  - тогда остаточная пропускная способность ребра $e = c(e) - f(e)$
  - остаточная сеть – сеть с остаточной пропускной способностью

Разрез

- Разрез cut(s, t) – это разбиение V
  - $V = S \cup T$
  - $s \in S$, $t \in T$
  - величина разреза $cut(s, t) = \Sigma\{ c(u, v) \mid u \in S, v \in T \}$
- $|f| \le cut(s, t)$

Теорема Форда-Фалкерсона

- $\max|f| = \min \mathrm{cut}(s, t)$
- Пусть поток f – максимальный
  - построим остаточную сеть относительно f
  - пусть S – множество вершин, достижимых из s в остаточной сети
  - $t \notin S$, иначе f – не максимальный
  - обозначим $T = V \setminus S$
  - рассмотрим $v \in S$, $u \in T$
    - ребро (v, u) – насыщено потоком: $f(v, u) = c(v, u)$
    - ребро (u, v) – без потока: $f(u, v) = 0$
  - величина потока через любой разрез составляет $|f|$
  - разрез (S, T) равен $|f|$ – он минимальный

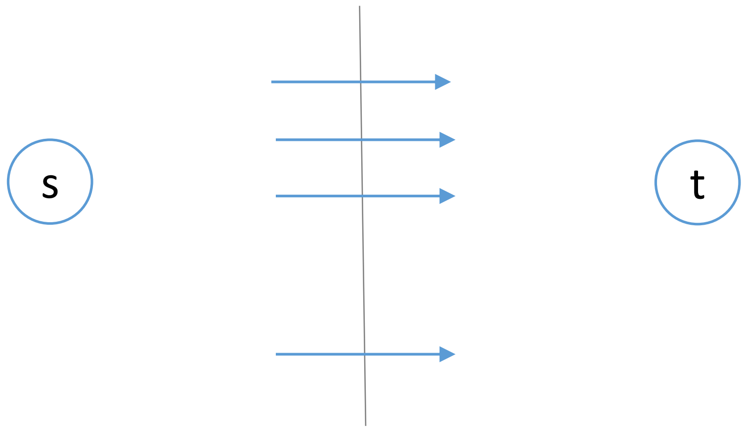
Метод Форда-Фалкерсона

- Начинаем с $f=0$
- Пока есть дополняющий путь path:$s \to t$ в остаточной сети:
  - c_{min} – минимум пропускных способностей рёбер path
  - добавляем к f поток величины c_{min} по пути path

- Пропускные способности целые => сложность $O(|f||E|)$
  - Псевдополиномиальная сложность
  - Если пропускные способности вещественные, то может не завершиться

Масштабирование потока

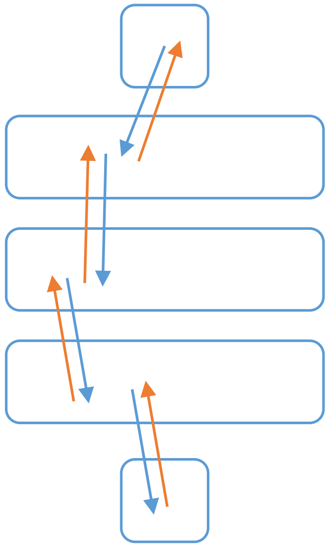
- $c_0(e) = 0$, $f_0 = 0$
- $c_{i+1}(e) = 2c_i(e) + bit_{k-i}(\ c(e)\ )$
- $f_{i+1} = 2f_i + g_i$ – стартуем не с нуля
  - $g_i = O(|E|)$



- Сложность $O(\log|\max\{c\}|\ |E|^2)$

Алгоритм Эдмондса-Карпа

- Метод Форда-Фалкерсона + BFS для поиска дополняющего пути
- В процессе работы алгоритма длина этого пути не уменьшается
  - в остоточной сети кратчайшее расстояние s→t не уменьшается
- Пусть алгоритм прошёл в путям $p_1 \dots p_k$
  - Каждый путь содержит критическое ребро
  - Любое ребро может быть критическим O(|V|) раз
  - k = O(|V||E|)
- Сложность O(|V||E|²)



Метод Диница

- Фаза алгоритма:
  - Строим слои, используя BFS
  - Находим набор «блокирующих» кратчайших путей
    - O(|E|) путей
  - Длина каждого пути = количество слоёв = O(|V|)
    - pruning – поддерживаем свойство:
      - «из каждой вершины кроме t есть исходящее ребро»
      - нет рёбер => удаляем вершину
    - сложность pruning = O(|E|) на одну фазу
- Всего O(|V|) фаз
- Сложность $O(|V|^2|E|)$