Рафинирование равновесий по Нэшу
Позиционные игры

Илья Кацев[1]

[1] Яндекс, НИУ ВШЭ

2017

Задача

Придумать игру двух лиц, в которой у каждого игрока по три стратегии и пара смешанных стратегий $(0.5,\ 0.3,\ 0.2)$, $(0.5,\ 0,\ 0.5)$ является равновесием по Нэшу.

Задача

Рассматривается конечная бескоалиционная игра двух игроков, где у первого n (чистых) стратегий, а у второго m.

а) Каковы минимальное и максимальное возможные количества равновесий по Нэшу в чистых стратегиях?

б) Тот же вопрос про смешанные стратегии.

Рафинирование равновесий по Нэшу

Рафинирование равновесий по Нэшу

Ситуация x^* называется ситуацией сильного равновесия в игре $\Gamma = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{K_i\}_{i \in N} \rangle$, если для любой коалиции игроков $S \subset N$ и любой ее стратегии $x_S = (x_i)_{i \in S}$ найдется такой игрок $i \in S$, что

$$K_i(x^{*S}, x_S) \leq K_i(x^*).$$

Рафинирование равновесий по Нэшу

Ситуация x^* называется ситуацией сильного равновесия в игре $\Gamma = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{K_i\}_{i \in N} \rangle$, если для любой коалиции игроков $S \subset N$ и любой ее стратегии $x_S = (x_i)_{i \in S}$ найдется такой игрок $i \in S$, что

$$K_i(x^{*S}, x_S) \leq K_i(x^*).$$

Общий смысл - никакой коалиции невыгодно отклоняться от положения равновесия.

Рафинирование равновесий по Нэшу

Ситуация x^* называется ситуацией сильного равновесия в игре $\Gamma = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{K_i\}_{i \in N} \rangle$, если для любой коалиции игроков $S \subset N$ и любой ее стратегии $x_S = (x_i)_{i \in S}$ найдется такой игрок $i \in S$, что

$$K_i(x^{*S}, x_S) \leq K_i(x^*).$$

Общий смысл - никакой коалиции невыгодно отклоняться от положения равновесия.

Упражнение

Приведите пример игры, где нет ситуаций сильного равновесия в смешанных стратегиях.

Рафинирование равновесий по Нэшу

Устойчивость по отношению к ошибкам ”дрожащей руки”.

Рафинирование равновесий по Нэшу

Устойчивость по отношению к ошибкам "дрожащей руки".

Пусть $\Gamma = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{K_i\}_{i \in N} \rangle$, X_i - конечные множества, M_i - множество смешанных стратегий игрока $i \in N$. Через M_0 обозначим подмножество вполне смешанных стратегий игроков

Рафинирование равновесий по Нэшу

Устойчивость по отношению к ошибкам ”дрожащей руки”.

Пусть $\Gamma = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{K_i\}_{i \in N} \rangle$, X_i - конечные множества, M_i - множество смешанных стратегий игрока $i \in N$. Через M_0 обозначим подмножество вполне смешанных стратегий игроков

Ситуация $\mu^* \in M$ называется ситуацией совершенного равновесия, если существует последовательность $\mu^k \in M_0$, такая что

$$\begin{aligned} \lim_{k \to \infty} \mu_i^k(x_i) &= \mu_i^*(x_i), \; \forall i \in N, x_i \in X_i, && (1) \\ \mu_i^* &\in \arg\max_{\tau_i \in M_i} K_i(\mu^{ki}, \tau_i) \; \forall i \in N. && (2) \end{aligned}$$

Совершенное равновесие

Утверждение

Любая ситуация совершенного равновесия является равновесием по Нэшу.

Совершенное равновесие

Утверждение

Любая ситуация совершенного равновесия является равновесием по Нэшу.

Теорема

В любой конечной бескоалиционной игре существует ситуация совершенного равновесия.

Позиционные игры.

Позиционные игры.

Рассмотрим следующую игру:

Имеются два игрока и две карты: старшая (С) и младшая (М).

Игрок 1 с вероятностью 1/2 получает одну из них, видит ее, но игрок 2 не знает, какую карту получил игрок 1.

Дальше ходит игрок 1: в обоих случаях он может либо спасовать, и тогда игра заканчивается, и он проигрывает 1, либо продолжить игру.

Если он продолжает, то далее ходит игрок 2, который также имеет возможность либо спасовать, и тогда заканчивается и игрок 2 проигрывает 1, либо попросить игрока 1 открыть карту.

Если у игрока 1 оказалась карта С, то игрок 1 выигрывает 2, если оказалась карта М, то проигрывает 2. Игра антагонистическая, то есть выигрыш одного игрока равен проигрышу другого.

Позиционные игры.

$n+1$ тип ходов - ходы каждого из игроков и случайные ”ходы природы”.

Информационное множество - множество позиций, который не может различить данный игрок i.

Окончательная (терминальная) позиция - позиция, в которой нет ходов.

Партией называется путь, соединяющий начальную позицию с окончательной.

Игры с полной информацией

Игрой с *полной информацией* называется позиционная игра, все информационные множества которой состоят из одной позиции.

Игры с полной информацией

Игрой с *полной информацией* называется позиционная игра, все информационные множества которой состоят из одной позиции.

Теорема (Цермело–Нейман)

Конечные игры n лиц с полной информацией имеют ситуации равновесия в чистых стратегиях.

Общее знание

Игрок 1 рационален (выбирает лучшую альтернативу)

Общее знание

Игрок 1 рационален (выбирает лучшую альтернативу)

Игрок 2 знает, что игрок 1 рационален

Общее знание

Игрок 1 рационален (выбирает лучшую альтернативу)

Игрок 2 знает, что игрок 1 рационален

Игрок 1 знает, что игрок 2 знает, что игрок 1 рационален

Общее знание

Игрок 1 рационален (выбирает лучшую альтернативу)

Игрок 2 знает, что игрок 1 рационален

Игрок 1 знает, что игрок 2 знает, что игрок 1 рационален

Игрок 2 знает, что игрок 1 знает, что игрок 2 знает, что игрок 1 рационален

Дуополия Курно

Два производителя товара. Стратегия = объем производства $q_i \in [0, a]$. Затраты на производство: $c_i(q_i) = cq_i, i = 1, 2$. Цена на рынке P зависит от количества товара на рынке $Q = q_1 + q_2$ и равна

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q, & \text{если } Q < a, \\ 0, & \text{если } Q \geq a. \end{cases}$$

Функция выигрыша каждого игрока равна прибыли:

$$K_i(q_1, q_2) = P(Q)q_i - cq_i,\ i = 1, 2.$$

Дуополия Курно

Два производителя товара. Стратегия = объем производства $q_i \in [0, a]$. Затраты на производство: $c_i(q_i) = cq_i, i = 1, 2$. Цена на рынке P зависит от количества товара на рынке $Q = q_1 + q_2$ и равна

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q, & \text{если } Q < a, \\ 0, & \text{если } Q \geq a. \end{cases}$$

Функция выигрыша каждого игрока равна прибыли:

$$K_i(q_1, q_2) = P(Q)q_i - cq_i,\ i = 1, 2.$$

Стратегии наилучшего ответа:

$$q_i = \frac{1}{2}(a - q_j - c),\ i, j = 1, 2, i \neq j.$$

Дуополия Курно

Два производителя товара. Стратегия = объем производства $q_i \in [0, a]$. Затраты на производство: $c_i(q_i) = cq_i, i = 1, 2$. Цена на рынке P зависит от количества товара на рынке $Q = q_1 + q_2$ и равна

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q, & \text{если } Q < a, \\ 0, & \text{если } Q \geq a. \end{cases}$$

Функция выигрыша каждого игрока равна прибыли:

$$K_i(q_1, q_2) = P(Q)q_i - cq_i,\ i = 1, 2.$$

Стратегии наилучшего ответа:

$$q_i = \frac{1}{2}(a - q_j - c),\ i, j = 1, 2, i \neq j.$$

Равновесие:

$$q_i = \frac{a - c}{3}, P = \frac{a + 2c}{3}, K_i = \frac{(a - c)^2}{9}$$

Дуополия Штакельберга

Фирмы выходят на рынок по очереди.

Дуополия Штаккельберга

Фирмы выходят на рынок по очереди.

Вторая фирма (по рациональности) на ход q_1 будет отвечать $q_2 = \frac{1}{2}(a - q_1 - c)$. Следовательно, цена будет равна $P = a - Q = \frac{1}{2}(a - q_1 + c)$ и выигрыш первой фирмы составит $K_1 = \frac{1}{2}(a - q_1 - c)q_1$. То есть задача сводится к максимизации $\frac{1}{2}(a - q_1 - c)q_1$

Дуополия Штаккельберга

Фирмы выходят на рынок по очереди.

Вторая фирма (по рациональности) на ход q_1 будет отвечать $q_2 = \frac{1}{2}(a - q_1 - c)$. Следовательно, цена будет равна $P = a - Q = \frac{1}{2}(a - q_1 + c)$ и выигрыш первой фирмы составит $K_1 = \frac{1}{2}(a - q_1 - c)q_1$. То есть задача сводится к максимизации $\frac{1}{2}(a - q_1 - c)q_1$

Результат:

$$q_1 = \frac{a - c}{2}, q_2 = \frac{a - c}{4}$$

Смешанные и поведенческие стратегии

Смешанная стратегия - выпуклая комбинаций чистых стратегий

Смешанные и поведенческие стратегии

Смешанная стратегия - выпуклая комбинаций чистых стратегий

Поведенческая стратегия говорит, с какими вероятностями надо выбирать ходы в каждом информационном множестве.

Полная память

Неформально, игрок *i* имеет в игре полную память, если при каждом его ходе он помнит, через в каких информационные множества он уже побывал к этому моменту, и какие ходы он там делал. Фактически это определение означает наличие полной информации игрока о самом себе.

Полная память

Неформально, игрок i имеет в игре полную память, если при каждом его ходе он помнит, через в каких информационные множества он уже побывал к этому моменту, и какие ходы он там делал. Фактически это определение означает наличие полной информации игрока о самом себе.

Теорема (Кун, 1953)

Для того чтобы смешанная стратегия μ_i игрока i была эквивалентна его соответствующей стратегии поведения β_i^{μ} необходимо и достаточно, чтобы игрок i имел в игре полную память.

Subgame perfect equilibrium

Набор поведенческих стратегий называется совершенным подыгровым равновесием (СПРН), если для любой подыгры (под-игры?) данный набор стратегий является равновесием по Нэшу.

Subgame perfect equilibrium

Набор поведенческих стратегий называется совершенным подыгровым равновесием (СПРН), если для любой подыгры (под-игры?) данный набор стратегий является равновесием по Нэшу.

Теорема

В любой позиционной игре с полной информацией существует СПРН.

Разбор д/з

2. Оптимальные стратегии (x^*, y^*) называются вполне смешанными, если $x_i^* > 0, y_j^* > 0$ для всех i, j. Игра, у которой любые оптимальные стратегии игроков вполне смешанные, называется вполне смешанной. Докажите, что если матричная игра вполне смешанная, то количества чистых стратегий у игроков совпадают, а оптимальные стратегии игроков x^*, y^* единственные.

Разбор д/з

8. Имеется два игрока, которым нужно разделить 100 долларов. Игрок 1 предлагает сумму $x \in [0, 100]$ игроку 2. Если игрок 2 соглашается, то он получает x, а игрок 1 получает $1 - x$. Если он не соглашается, то оба получают по 0. Найдите все равновесия по Нэшу в этой игре.

Разбор д/з

9. Рассматриваем игру с постройкой магазинов, которая описывалась на занятии: жители города равномерно распределены по отрезку $[A, B]$. n игроков выбирают места для постройки своих магазинов. Выигрыш игрока равен мере множества людей, для которых его магазин является ближайшим (люди, для которых несколько магазинов являются ближайшими, ”делятся” поровну между этими магазинами).

а) Пусть $n = 4$. Найдите все равновесия по Нэшу.

б) Пусть $n = 5$. Найдите все равновесия по Нэшу.

в) Найдите все значения n, для которых в игре нет равновесия по Нэшу.

Разбор д/з

10. Рассмотрим игру из предыдущей задачи в пространстве большей размерности.
а) Существует ли такое множество ненулевой меры (вместо отрезка $[A, B]$), чтобы для $n = 3$ было равновесие по Нэшу?
б) Существует ли такое выпуклое множество?

Разбор д/з

11. Рассматриваем аукцион первой цены, на котором разыгрываются две единицы товара. То есть сначала человек, назначивший максимальную цену, покупает товар по этой цене, затем тот, кто назначил вторую по величине цену, покупает второй экземпляр товара по этой цене. Найдите хотя бы одно равновесие по Нэшу в данной игре.

Домашнее задание

12. Приведите пример игры, где нет ситуаций сильного равновесия в смешанных стратегиях.

Домашнее задание

13. Найти все ситуации равновесия в игре

$$\begin{pmatrix} (0,0) & (2,2) \\ (1,1) & (0,0) \end{pmatrix}.$$

Домашнее задание

14. Найти все ситуации равновесия в игре

$$\begin{pmatrix} (0,0) & (5,4) & (4,5) \\ (4,5) & (0,0) & (5,4) \\ (5,4) & (4,5) & (0,0) \end{pmatrix}.$$

Домашнее задание

15. Найти все ситуации равновесия в игре трех лиц, в которой игрок 1 выбирает строку, игрок 2 выбирает столбец. а игрок 3 выбирает матрицу.

$$\begin{pmatrix} (0,0,0) & (6,5,4) \\ (5,4,6) & (0,0,0) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} (4,6,5) & (0,0,0) \\ (0,0,0) & (0,0,0) \end{pmatrix}$$

Домашнее задание

16. В игре трех лиц

$$\begin{pmatrix} 1,1,1 & 4,4,0 \\ 3,2,2 & 3,2,2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1,1,1 & 0,0,4 \\ 0,0,0 & 0,0,0 \end{pmatrix}$$

найти ситуации совершенного и несовершенного равновесия в чистых стратегиях.

Домашнее задание

17. В игре трех лиц

$$\begin{pmatrix} 1,1,1 & 1,0,1 \\ 1,1,1 & 0,0,1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1,1,0, & 0,0,0 \\ 0,1,0 & 1,0,0 \end{pmatrix}$$

найти все ситуации равновесия. Какие из них являются ситуациями совершенного равновесия?

Домашнее задание

18. Докажите, что в любой конечной бескоалиционной игре существует ситуация совершенного равновесия (в смешанных стратегиях).

Домашнее задание

19. Рассматривается позиционная игра. Докажите, что для того чтобы смешанная стратегия μ_i игрока *i* была эквивалентна его соответствующей стратегии поведения β_i^{μ} необходимо и достаточно, чтобы игрок *i* имел в игре полную память. (Теорема Куна о полной памяти).