План лекции

1. Теоремы о неподвижных точках

2. Двойственные задачи линейного программирования

Компакт

$\mathbb{R}^n \longrightarrow$ метрика $\longrightarrow$ топология

Компакт

$\mathbb{R}^n \longrightarrow$ метрика $\longrightarrow$ топология

Определение

Множество X называется компактом, если из любого открытого покрытия X можно выбрать конечное подпокрытие.

Компакт

$\mathbb{R}^n \longrightarrow$ метрика $\longrightarrow$ топология

Определение

Множество X называется компактом, если из любого открытого покрытия X можно выбрать конечное подпокрытие.

Определение

Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется компактом, если оно является замкнутым и ограниченным.

Компакт

$\mathbb{R}^n \longrightarrow$ метрика $\longrightarrow$ топология

Определение

Множество X называется компактом, если из любого открытого покрытия X можно выбрать конечное подпокрытие.

Определение

Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется компактом, если оно является замкнутым и ограниченным.

Утверждение

Из любой последовательности $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ в компактном множестве X можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Компакт

$\mathbb{R}^n \longrightarrow$ метрика $\longrightarrow$ топология

Определение

Множество X называется компактом, если из любого открытого покрытия X можно выбрать конечное подпокрытие.

Определение

Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется компактом, если оно является замкнутым и ограниченным.

Утверждение

Из любой последовательности $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ в компактном множестве X можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Утверждение

Непрерывная функция, заданная на компакте, достигает максимума.

Теорема Брауэра

Теорема (Брауэр, 1910)

Любое непрерывное отображение замкнутого шара в себя в конечномерном евклидовом пространстве имеет неподвижную точку.

Гомеоморфизм

Определение

Множества $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ *являются гомеоморфными, если существует такое непрерывное взаимно-однозначное отображение* $f : X \to Y$*, что обратное отображение* f^{-1} *тоже непрерывно.*

Утверждение

Любое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$*, содержащее внутренние точки, гомеоморфно шару.*

Теорема Брауэра

Теорема (Брауэр, 1910)

Любое непрерывное отображение замкнутого шара в себя в конечномерном евклидовом пространстве имеет неподвижную точку.

Теорема Брауэра

Теорема (Брауэр, 1910)

Любое непрерывное отображение замкнутого шара в себя в конечномерном евклидовом пространстве имеет неподвижную точку.

Лемма (Шпернер, 1928)

Пусть дана триангуляция Σ симплекса Δ_S с множеством вершин V. Пусть каждая вершина $v \in V$ помечена некоторым элементом из S, то есть дано отображение $l : V \to S$, причем вершины, лежащие на грани Δ_T, $T \subset S$, имеют метки из T. Тогда существует симплекс σ данной триангуляции, вершины которого несут все метки из S.

Теорема Какутани

Многозначная функция из X в Y сопоставляет каждой точке X некоторое подмножество Y. Многозначная функция φ называется замкнутой, если множество $\{(x, y) : y \in \varphi(x)\}$ замкнуто.

Теорема Какутани

Многозначная функция из X в Y сопоставляет каждой точке X некоторое подмножество Y. Многозначная функция φ называется замкнутой, если множество $\{(x, y) : y \in \varphi(x)\}$ замкнуто.

Теорема (Какутани, 1941)

Пусть S - непустое компактное выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$. Если многозначная функция $\varphi : S \to S$ является замкнутой и $\varphi(x)$ - выпукло для любого $x \in S$, то φ имеет неподвижную точку.

Дополнительное чтение

В.И.Данилов

Лекции о неподвижных точках.

http://mathecon.cemi.rssi.ru/danilov/files/Lect-FP.pdf

Двойственные задачи линейного программирования

Пример

Есть производство двух продуктов из трех типов ресурсов. Для производства единицы первого продукта необходимо потратить 2 единицы ресурса первого типа, 4 единицы ресурса второго типа и 1 единицу ресурса третьего типа. Для второго продукта соответствующие числа равны 3, 1 и 4.
При этом одну единицу первого продукта можно продать за 4 рубля, а одну единицу второго продукта - за 5 рублей. Как следует организовать производство, если в запасе есть по 30 единиц ресурсов 1 и 3 и 40 единиц ресурса 2?

Пример

Есть производство двух продуктов из трех типов ресурсов. Для производства единицы первого продукта необходимо потратить 2 единицы ресурса первого типа, 4 единицы ресурса второго типа и 1 единицу ресурса третьего типа. Для второго продукта соответствующие числа равны 3, 1 и 4.
При этом одну единицу первого продукта можно продать за 4 рубля, а одну единицу второго продукта - за 5 рублей. Как следует организовать производство, если в запасе есть по 30 единиц ресурсов 1 и 3 и 40 единиц ресурса 2?

$$\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 1 & \quad 4 \\ 3 & 1 & 4 & \quad 5 \\ 30 & 40 & 30 & \end{array}$$

Пример

2	4	1	4
3	1	4	5
30	40	30	

Пример

2	4	1	4
3	1	4	5
30	40	30	

Производим x_1 единиц первого продукта и x_2 второго:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 4x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 + 4x_2 \leq 30 \end{cases}$$

Пример

$$\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 1 & \quad 4 \\ 3 & 1 & 4 & \quad 5 \\ 30 & 40 & 30 & \end{array}$$

Производим x_1 единиц первого продукта и x_2 второго:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 4x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 + 4x_2 \leq 30 \end{cases}$$

Задача:

$$4x_1 + 5x_2 \to \max$$

Двойственная задача

Прямая задача:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 4x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 + 4x_2 \leq 30 \end{cases}$$

$$4x_1 + 5x_2 \to \max$$

Двойственная задача

Прямая задача:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 4x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 + 4x_2 \leq 30 \end{cases}$$

$$4x_1 + 5x_2 \to \max$$

Двойственная задача:

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 4 \\ 3y_1 + 1y_2 + 4y_3 \geq 5 \end{cases}$$

$$30y_1 + 40y_2 + 30y_3 \to \min$$

Матричная запись

Прямая задача:

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0$$

$$\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \to \max$$

Матричная запись

Прямая задача:

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0$$

$$\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \to \max$$

Двойственная задача:

$$A^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq 0$$

$$\mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \to \min$$

Матричная запись

Прямая задача:

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0$$

$$\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \to \max$$

Двойственная задача:

$$A^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq 0$$

$$\mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \to \min$$

Вектор **x** называется допустимым, если удовлетворяет условиям прямой задачи, и оптимальным, если на нем достигается максимум.

Утверждения

Теорема

Если $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ *и* $A^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$, *то* $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}$

Утверждения

Теорема

Если $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ *и* $A^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$, *то* $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}$

Теорема

Если для допустимых векторов (прямой и двойственной задач) $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *выполнено* $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$, *то* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *являются оптимальными векторами.*

Утверждения

Теорема

Если $A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$ *и* $A^T\mathbf{y} \ge \mathbf{c}$, *то* $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \le \mathbf{b}^T\mathbf{y}$

Теорема

Если для допустимых векторов (прямой и двойственной задач) $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *выполнено* $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$, *то* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *являются оптимальными векторами.*

Теорема

Если для допустимых векторов (прямой и двойственной задач) $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *выполнено* $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$ *и* $A^i\mathbf{x} < \mathbf{b}_i$, *то* $\mathbf{y}_i = 0$.

Утверждения

Теорема

Если $A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$ *и* $A^T\mathbf{y} \ge \mathbf{c}$, *то* $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \le \mathbf{b}^T\mathbf{y}$

Теорема

Если для допустимых векторов (прямой и двойственной задач) $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *выполнено* $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$, *то* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *являются оптимальными векторами.*

Теорема

Если для допустимых векторов (прямой и двойственной задач) $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *выполнено* $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$ *и* $A^i\mathbf{x} < \mathbf{b}_i$, *то* $\mathbf{y}_i = 0$.

Теорема

Если векторы $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *являются решениями прямой и двойственной задач соответственно, то выполнено* $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$.