Теория игр

Илья Кацев[1]

[1] Яндекс, НИУ ВШЭ, СПб ЭМИ РАН

2017

Предмет

- Конкуренция vs кооперация

Предмет

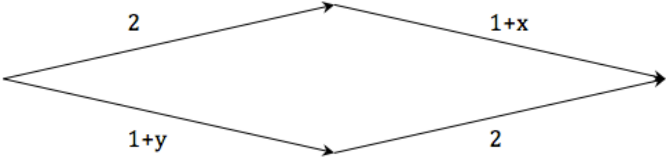
- Конкуренция vs кооперация
- Конкуренция = ”правила игры”

Предмет

- Конкуренция vs кооперация
- Конкуренция = ”правила игры”
- Рынок работает не всегда

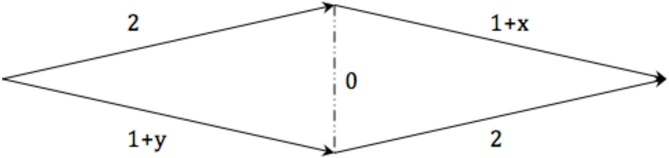
Предмет

- Конкуренция vs кооперация
- Конкуренция = ”правила игры”
- Рынок работает не всегда



Предмет

- Конкуренция vs кооперация
- Конкуренция = "правила игры"
- Рынок работает не всегда



История

- Библия, Талмуд - некоторые ситуации
- Cournot A (1838), Bertrand J (1883) - конкуренция
- Zermelo E (1913) - шахматы
- Borel E (1921) - стратегические игры для трех стратегий
- von Neumann J, Morgenstern O (1944, 1947) - “Теория игр и экономическое поведение”
- Nash JF (1950, 1951) - Равновесие и арбитражное решение
- Shapley LS (1953) - вектор Шепли
- Бондарева О (1963), Shapley LS (1967) - сбалансированные игры

Talmud rule

Наследство $E = 400$.

Три жены претендуют на $c_1 = 100$, $c_2 = 200$, $c_3 = 300$.

Talmud rule

Наследство $E = 400$.

Три жены претендуют на $c_1 = 100$, $c_2 = 200$, $c_3 = 300$.

Coalition
$\{1\}$
$\{2\}$
$\{3\}$
$\{12\}$
$\{13\}$
$\{23\}$

Talmud rule

Наследство $E = 400$.

Три жены претендуют на $c_1 = 100$, $c_2 = 200$, $c_3 = 300$.

Coalition	*Guarantee*
$\{1\}$	0
$\{2\}$	0
$\{3\}$	100
$\{12\}$	100
$\{13\}$	200
$\{23\}$	300

Talmud rule

Наследство $E = 400$.

Три жены претендуют на $c_1 = 100$, $c_2 = 200$, $c_3 = 300$.

Coalition	*Guarantee*	*Value*
$\{1\}$	0	50
$\{2\}$	0	125
$\{3\}$	100	225
$\{12\}$	100	175
$\{13\}$	200	275
$\{23\}$	300	350

Talmud rule

Наследство $E = 400$.

Три жены претендуют на $c_1 = 100$, $c_2 = 200$, $c_3 = 300$.

Coalition	*Guarantee*	*Value*	*Satisfaction*
$\{1\}$	0	50	50
$\{2\}$	0	125	125
$\{3\}$	100	225	125
$\{12\}$	100	175	75
$\{13\}$	200	275	75
$\{23\}$	300	350	50

История

- Библия, Талмуд - некоторые ситуации
- Cournot A (1838), Bertrand J (1883) - конкуренция
- Zermelo E (1913) - шахматы
- Borel E (1921) - стратегические игры для трех стратегий
- von Neumann J, Morgenstern O (1944, 1947) - “Теория игр и экономическое поведение”
- Nash JF (1950, 1951) - Равновесие и арбитражное решение
- Shapley LS (1953) - вектор Шепли
- Бондарева О (1963), Shapley LS (1967) - сбалансированные игры

Борель и стратегические игры

Два игрока, три стратегии.

Выигрыш первого игрока a_{ij}, причем $a_{ii} = 0$.

Борель и стратегические игры

Два игрока, три стратегии.
Выигрыш первого игрока a_{ij}, причем $a_{ii} = 0$.
Первый игрок выбирает стратегию i с вероятностью p_i, второй - с вероятностью q_i. Тогда мат. ожидание выигрыша первого игрока равно

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ a_{23} & -a_{13} & a_{12} \end{vmatrix}$$

История

- Библия, Талмуд - некоторые ситуации
- Cournot A (1838), Bertrand J (1883) - конкуренция
- Zermelo E (1913) - шахматы
- Borel E (1921) - стратегические игры для трех стратегий
- von Neumann J, Morgenstern O (1944, 1947) - “Теория игр и экономическое поведение”
- Nash JF (1950, 1951) - Равновесие и арбитражное решение
- Shapley LS (1953) - вектор Шепли
- Бондарева О (1963), Shapley LS (1967) - сбалансированные игры

Дилемма заключенного

C = “cooperate”

D = “defect”

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} -1, -1 & -10, 0 \\ 0, -10 & -9, -9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Дилемма заключенного

C = “cooperate”

D = “defect”

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} -1, -1 & -10, 0 \\ 0, -10 & -9, -9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Дилемма заключенного

C = “cooperate”

D = “defect”

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & \color{blue}{D} \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} -1,-1 & \color{blue}{-10,0} \\ 0,-10 & \color{blue}{-9,-9} \end{pmatrix} \end{array}$$

Дилемма заключенного

C = “cooperate”

D = “defect”

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} -1, -1 & -10, 0 \\ 0, -10 & -9, -9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Равновесие по Нэшу

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 1,0 \\ 1,0 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Нет равновесий

Равновесие по Нэшу

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 1,0 \\ 1,0 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Нет равновесий - используем смешанные стратегии.

Равновесие по Нэшу

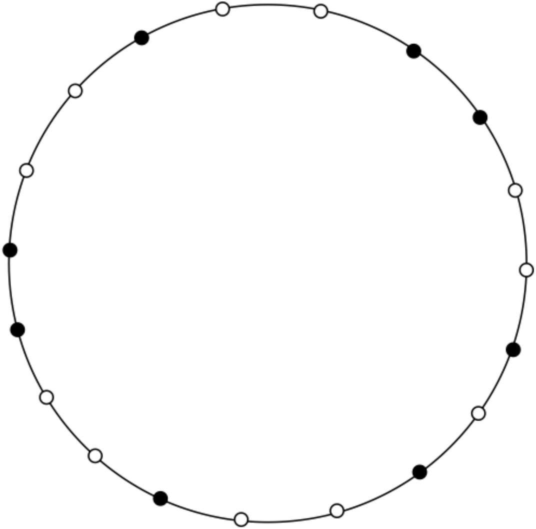
$$\begin{pmatrix} 0,1 & 1,0 \\ 1,0 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Нет равновесий - используем смешанные стратегии.

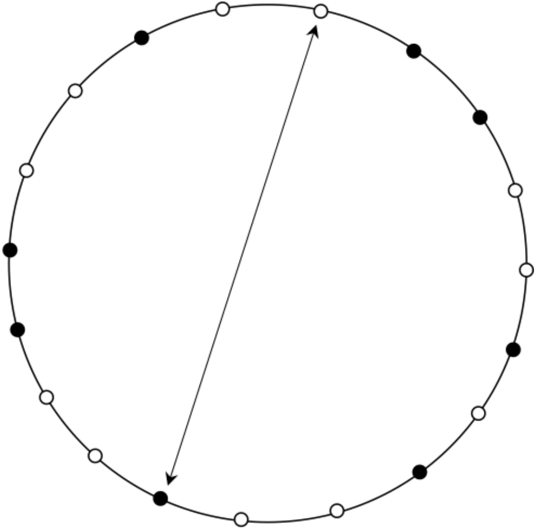
$$\begin{pmatrix} 5,5 & 1,0 \\ 1,0 & 7,7 \end{pmatrix}$$

Что делать, если несколько равновесий?

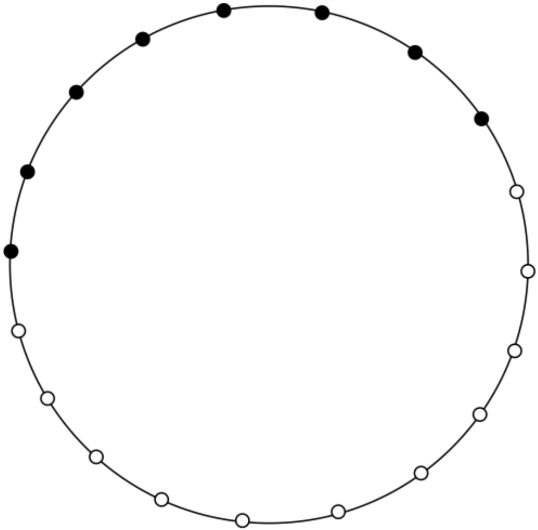
Пример



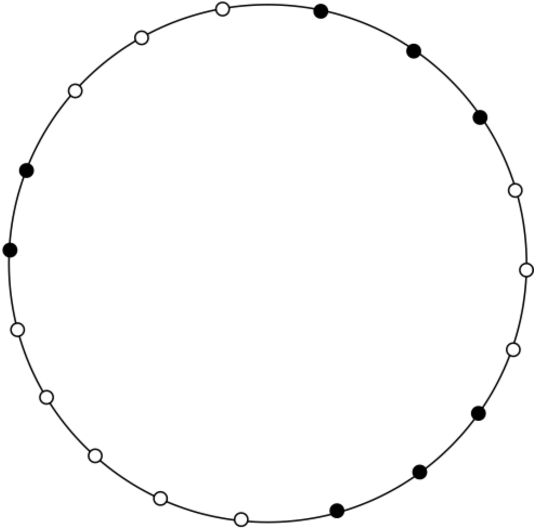
Пример



Пример

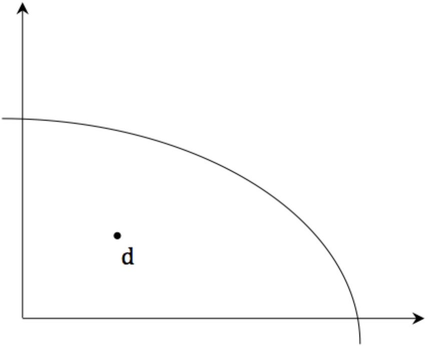


Пример



Арбитражные схемы

Арбитражной схемой называется пара (X, d), где $X \subset \mathbb{R}^2$ - переговорное множество, а $d \in X$ - точка несогласия.



Решением для класса арбитражных схем $\mathcal{B}$ называется отображение $\varphi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^2$.

Аксиомы

1. Парето-оптимальность: $\varphi(X, d) \in \partial X$.

Аксиомы

1. Парето-оптимальность: $\varphi(X, d) \in \partial X$.
2. Индивидуальная рациональность: $\varphi(X, d) \geq d$.

Аксиомы

1. Парето-оптимальность: $\varphi(X, d) \in \partial X$.
2. Индивидуальная рациональность: $\varphi(X, d) \geq d$.
3. Независимость от аффинных преобразований: для $a > 0, b \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi(aX + b, ad + b) = a\varphi(X, d) + b.$$

Аксиомы

1. Парето-оптимальность: $\varphi(X, d) \in \partial X$.
2. Индивидуальная рациональность: $\varphi(X, d) \geq d$.
3. Независимость от аффинных преобразований: для $a > 0, b \in \mathbb{R}^2$
$$\varphi(aX + b, ad + b) = a\varphi(X, d) + b.$$
4. Анонимность: если $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ - симметрия относительно прямой $y = x$, то $\varphi(\pi X, \pi d) = \pi\varphi(X, d)$.

Аксиомы

1. Парето-оптимальность: $\varphi(X, d) \in \partial X$.
2. Индивидуальная рациональность: $\varphi(X, d) \geq d$.
3. Независимость от аффинных преобразований: для $a > 0, b \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi(aX + b, ad + b) = a\varphi(X, d) + b.$$

4. Анонимность: если $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ - симметрия относительно прямой $y = x$, то $\varphi(\pi X, \pi d) = \pi\varphi(X, d)$.
5. Независимость от несущественных альтернатив: если $X\prime \subset X$ и $\varphi(X, d) \in X'$, то $\varphi(X', d) = \varphi(X, d)$.

Аксиомы

1. Парето-оптимальность: $\varphi(X, d) \in \partial X$.
2. Индивидуальная рациональность: $\varphi(X, d) \geq d$.
3. Независимость от аффинных преобразований: для $a > 0, b \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi(aX + b, ad + b) = a\varphi(X, d) + b.$$

4. Анонимность: если $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ - симметрия относительно прямой $y = x$, то $\varphi(\pi X, \pi d) = \pi\varphi(X, d)$.
5. Независимость от несущественных альтернатив: если $X\prime \subset X$ и $\varphi(X, d) \in X'$, то $\varphi(X', d) = \varphi(X, d)$.

Теорема (Нэш, 1950)

Существует только одно решение, удовлетворяющее аксиомам 1,3,4,5.

Нобелевские премии

- **1971**, J.Hicks, K.Arrow
  За новаторский вклад в общую теорию равновесия и теорию благосостояния
- **1994**, J.F.Nash, J.C.Harsanyi, R.Selten
  За анализ равновесия в теории некоалиционных игр
- **2005**, R.Aumann, T.Schelling
  За углубление нашего понимания сути конфликта и сотрудничества путем анализа теории игр
- **2007**, L.Hurwicz, E.Maskin, R.Myerson
  За создание основ теории оптимальных механизмов
- **2012**, A.E.Roth, L.S.Shapley
  За теорию стабильного распределения и практики устройства рынков

Теорема Эрроу

Теорема Эрроу

Аксиома независимости от несущественных альтернатив (АННА)

Рассмотрим 2 задачи группового выбора. Если для двух альтернатив $a, b \in A$ индивидуальные предпочтения участников совпадают в двух задачах, то и отношение коллективного предпочтения совпадает.

Аксиома единогласия

Если $a \succ_i b$ для всех $i \in N$, то $a \succ b$.

Теорема Эрроу

Аксиома независимости от несущественных альтернатив (АННА)

Рассмотрим 2 задачи группового выбора. Если для двух альтернатив $a, b \in A$ индивидуальные предпочтения участников совпадают в двух задачах, то и отношение коллективного предпочтения совпадает.

Аксиома единогласия

Если $a \succ_i b$ для всех $i \in N$, то $a \succ b$.

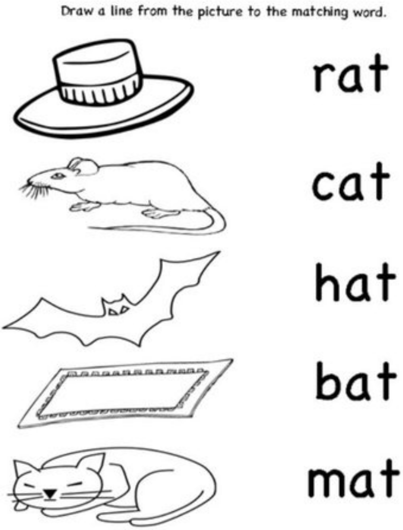
Теорема (Эрроу, 1950)

Пусть $\mathcal{G}$ - класс всех задач группового выбора с числом кандидатов большим двух, так что все возможные комбинации индивидуальных предпочтений допустимы. Пусть правило группового выбора $\succ$ удовлетворяет аксиомам АННА и единогласия. Тогда это правило является диктаторским, т.е. существует такое $i \in N$, что $\succ = \succ_i$.

Нобелевские премии

- **1971**, J.Hicks, K.Arrow
  За новаторский вклад в общую теорию равновесия и теорию благосостояния
- **1994**, J.F.Nash, J.C.Harsanyi, R.Selten
  За анализ равновесия в теории некоалиционных игр
- **2005**, R.Aumann, T.Schelling
  За углубление нашего понимания сути конфликта и сотрудничества путем анализа теории игр
- **2007**, L.Hurwicz, E.Maskin, R.Myerson
  За создание основ теории оптимальных механизмов
- **2012**, A.E.Roth, L.S.Shapley
  За теорию стабильного распределения и практики устройства рынков

Matching


Draw a line from the picture to the matching word.
rat
cat
hat
bat
mat

Matching


Maraschino
Cayenne
Red
Maroon
Plum
Eggplant
Purple
Grape
Orchid
Lavender
Carnation
Strawberry
Bubblegum
Pink
Magenta
Salmon
Tangerine
Orange
Cantaloupe
Banana
Yellow
Lemon
Honeydew
Lime
Spring
Clover
Fern
Green
Moss
Flora
Seam Foam
Spindrift
Teal
Blue
Sky
Turquoise

Литература

1. Maschler M., Solan E., Zamir S. Game Theory. Translated from the Hebrew by Ziv Hellman and edited by Mike Borns, 2013

2. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков, М. Наука, 1985

3. Оуэн Г. Теория игр, М. Мир, 1971

4. Мулен Э. Теория игр. С примерами из математической экономики, М. Мир, 1985

5. Myerson R. Game Theory. Analysis of Conflict. Harvard Univ. Press, 1991

6. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели, М. Мир, 1991

7. Печерский С.Л., Яновская Е.Б. Кооперативные игры: решения и аксиомы, Европейский Университет в Санкт-Петербурге, 2004

8. Peleg B.,Sudholter P. Introduction to the theory of cooperative games, Kluwer Acad.Publiushers, 2003

Важное

1. Домашние задания сдавать через сайт CSC **до их разбора**.

2. Следующий раз - 21 февраля, ликбез (линейное программирование + теоремы о неподвижной точке), далее по вторникам.