Теорема об ожидаемой полезности и антагонистические игры

Илья Кацев[1]

[1] Яндекс, НИУ ВШЭ

2017

Пример

Рассмотрим игру, похожую на покер. В данный момент есть две возможности - играть или "спасовать". При игре сравниваются карты и в случае выигрыша мы получаем 90 рублей, в случае проигрыша теряем 60 рублей.
Известно, что с вероятностью $\frac{1}{3}$ мы выиграем. Альтернатива - пасовать и получить -20.
Стоит ли играть?

Пример

Рассмотрим игру, похожую на покер. В данный момент есть две возможности - играть или "спасовать". При игре сравниваются карты и в случае выигрыша мы получаем 90 рублей, в случае проигрыша теряем 60 рублей.
Известно, что с вероятностью $\frac{1}{3}$ мы выиграем. Альтернатива - пасовать и получить -20.
Стоит ли играть?
Математическое ожидание равно

$$90 \cdot \frac{1}{3} - 60 \cdot \frac{2}{3} = -10 > -20.$$

Но правильно ли его использовать?

Примеры

А. Альтернатива:

1. Получить \$1M
2. С вероятностью 0.5 получить \$2M

Примеры

А. Альтернатива:

1. Получить \$1M
2. С вероятностью 0.5 получить \$2M

Б. Вероятности и выигрыши

$$\begin{array}{cccccc} 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/32 & \dots \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & \dots \end{array}$$

Полезность

Полезность

Полезность - мера удовлетворенности агента.

Полезность

Полезность - мера удовлетворенности агента.

Предположение - для каждого агента существует функция полезности и он стремится максимизировать ее мат. ожидание.

Отношение предпочтения

Есть множество альтернатив X, рассмотрим множество лотерей $\Delta(X)$.
У агента есть отношение предпочтения "$>$" на множестве $\Delta(X)$. Аксиомы:

Отношение предпочтения

Есть множество альтернатив X, рассмотрим множество лотерей $\Delta(X)$.
У агента есть отношение предпочтения $" > "$ на множестве $\Delta(X)$. Аксиомы:

Аксиома (Полнота)

Для любых $x, y \in \Delta(X)$ верно одно из трех: $x > y$, $x < y$, $x = y$.

Отношение предпочтения

Есть множество альтернатив X, рассмотрим множество лотерей $\Delta(X)$.
У агента есть отношение предпочтения $" > "$ на множестве $\Delta(X)$. Аксиомы:

Аксиома (Полнота)

Для любых $x, y \in \Delta(X)$ верно одно из трех: $x > y$, $x < y$, $x = y$.

Аксиома (Транзитивность)

Если $x > y$, $y > z$, то $x > z$.

Отношение предпочтения

Есть множество альтернатив X, рассмотрим множество лотерей $\Delta(X)$.
У агента есть отношение предпочтения $" > "$ на множестве $\Delta(X)$. Аксиомы:

Аксиома (Полнота)

Для любых $x, y \in \Delta(X)$ верно одно из трех: $x > y$, $x < y$, $x = y$.

Аксиома (Транзитивность)

Если $x > y$, $y > z$, то $x > z$.

Аксиома (Непрерывность)

Если $x > y > z$, то существует такое число $\alpha \in (0, 1)$, что

$$\alpha x + (1 - \alpha) z > y.$$

Отношение предпочтения

Есть множество альтернатив X, рассмотрим множество лотерей $\Delta(X)$.
У агента есть отношение предпочтения "$>$" на множестве $\Delta(X)$. Аксиомы:

Аксиома (Полнота)

Для любых $x, y \in \Delta(X)$ верно одно из трех: $x > y$, $x < y$, $x = y$.

Аксиома (Транзитивность)

Если $x > y$, $y > z$, то $x > z$.

Аксиома (Непрерывность)

Если $x > y > z$, то существует такое число $\alpha \in (0, 1)$, что

$$\alpha x + (1 - \alpha) z > y.$$

Аксиома (Независимость от несущественных альтернатив)

Если $x > y$, то для любого z верно $\alpha x + (1 - \alpha) z > \alpha y + (1 - \alpha) z$.

Теорема об ожидаемой полезности

Теорема

Если отношение предпочтения удовлетворяет аксиомам (1)-(4), то существует такая функция $U : X \to \mathbb{R}$*, что для любых* $x, y \in \Delta(X)$

$$x > y \Leftrightarrow EU(x) > EU(y).$$

План доказательства

1. Для $u < v$ строим отображение ”интервала” между ними на $(0, 1)$ и доказываем, что оно - биекция

План доказательства

1. Для $u < v$ строим отображение ”интервала” между ними на $(0, 1)$ и доказываем, что оно - биекция
2. Доказываем единственность такого отображения с фиксированными границами и аддитивностью с одного края (тут уже границы уже не обязательно 0 и 1)

План доказательства

1. Для $u < v$ строим отображение "интервала" между ними на $(0, 1)$ и доказываем, что оно - биекция
2. Доказываем единственность такого отображения с фиксированными границами и аддитивностью с одного края (тут уже границы уже не обязательно 0 и 1)
3. При наложении функции совпадают

План доказательства

1. Для $u < v$ строим отображение "интервала" между ними на $(0, 1)$ и доказываем, что оно - биекция
2. Доказываем единственность такого отображения с фиксированными границами и аддитивностью с одного края (тут уже границы уже не обязательно 0 и 1)
3. При наложении функции совпадают
4. Определяем функцию в данной точке как значения всех таких функций, которые в данных двух точках принимают значения 0 и 1. Показываем, что это одно и то же число

План доказательства

1. Для $u < v$ строим отображение "интервала" между ними на $(0, 1)$ и доказываем, что оно - биекция
2. Доказываем единственность такого отображения с фиксированными границами и аддитивностью с одного края (тут уже границы уже не обязательно 0 и 1)
3. При наложении функции совпадают
4. Определяем функцию в данной точке как значения всех таких функций, которые в данных двух точках принимают значения 0 и 1. Показываем, что это одно и то же число
5. Доказываем, что построенная функция нам подходит

Домашнее задание

1. Пусть X - конечное множество. Придумайте отношение предпочтения $" > "$ на $\Delta(X)$, которое удовлетворяет трем из четырех аксиом в теореме фон Неймана (соответственно, задача содержит 4 пункта).

Антагонистические игры

Бескоалиционная игра (в нормальной форме)

$$\Gamma = \{N, \{X_i\}_{i \in N}, \{K_i\}_{i \in N}\}.$$

Здесь N - конечное множество игроков,

$X_i, i \in N-$ множество стратегий игрока $i \in N$,

$K_i : \prod_{i \in N} X_i \to \mathbb{R}-$ функция выигрыша игрока $i \in N$,

Антагонистические игры

Бескоалиционная игра (в нормальной форме)

$$\Gamma = \{N, \{X_i\}_{i \in N}, \{K_i\}_{i \in N}\}.$$

Здесь N - конечное множество игроков,
$X_i, i \in N-$ множество стратегий игрока $i \in N$,
$K_i : \prod_{i \in N} X_i \to \mathbb{R}-$ функция выигрыша игрока $i \in N$,

Конечная антагонистическая игра: $|N| = 2, N = \{1, 2\}, X_1, X_2$ конечны, $K_1(x_1, x_2) + K_2(x_1, x_2) = 0(const)$ для всех $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$.

Антагонистические игры

Каждая конечная антагонистическая игра с $X_1 = \{1, ..., m\}, X_2 = \{1, ..., n\}$ полностью задается $m \times n$ матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & ..., & a_{1n} \\ a_{21}, & ..., & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & ..., & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} = K_1(i, j)$.
Поэтому конечные антагонистические игры называются матричными.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Седловые точки

Упражнение

Покажите, что для произвольных i, j

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$$

Седловые точки

Упражнение

Покажите, что для произвольных i, j

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$$

Седловой точкой называется пара (i^*, j^*), для которой выполняется равенство (в точках i^*,j^* достигаются внешние экстремумы)

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

Смешанные стратегии

Смешанной стратегией игрока называется вероятностное распределение на множестве его первоначальных, *чистых* стратегий. В матричной игре смешанной стратегией игрока 1 является вектор

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}, \ x_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

а смешанной стратегией игрока 2 – вектор

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \ y_j \geq 0, \ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Если игрок 1 применяет смешанную стратегию x, а игрок 2 – смешанную стратегию y, то *ожидаемый выигрыш* игрока 1 равен

$$A(x, y) = x^{\mathrm{T}} A y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Теорема о минимаксе

Теорема (Теорема о минимаксе, фон Нейман (1928))

$$\max_x \min_y x^T A y = \min_y \max_x x^T A y.$$

Двойственная задача ЛП

Прямая задача:

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0$$

$$\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \to \max$$

Двойственная задача:

$$A^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq 0$$

$$\mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \to \min$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Вполне смешанные игры

Оптимальные стратегии (x^*, y^*) называются вполне смешанными, если $x_i^* > 0, y_j^* > 0$ для всех i, j. Игра, у которой любые оптимальные стратегии игроков вполне смешанные, называется вполне смешанной.

Утверждение

Если матричная игра вполне смешанная, то $m = n$, а оптимальные стратегии игроков x^*, y^* единственные.

Диагональные игры

Диагональные матричные игры:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Диагональные игры

Диагональные матричные игры:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Утверждение

Любая диагональная игра является вполне смешанной.

Домашнее задание

2. Оптимальные стратегии (x^*, y^*) называются вполне смешанными, если $x_i^* > 0, y_j^* > 0$ для всех i, j. Игра, у которой любые оптимальные стратегии игроков вполне смешанные, называется вполне смешанной. Докажите, что если матричная игра вполне смешанная, то количества чистых стратегий у игроков совпадают, а оптимальные стратегии игроков x^*, y^* единственные.

Домашнее задание

3. Квадратная матрица $a = \|a_{ij}\|$ называется *кососимметрической*, если $a_{ij} = -a_{ji}$ для всех i, j. Матричная игра называется *симметричной,* если ее матрица кососимметрична. Докажите, что

а. выигрыши игроков при использовании оптимальных стратегий равны нулю.

б. множества оптимальных стратегий игроков в симметричной игре совпадают.

Домашнее задание

4. Игрок 2 прячет предмет в один из n ящиков. Первый игрок пытается найти его, открывая последовательно 2 ящика. Если он обнаружит предмет в ящике $k = 1, ..., n$, то его выигрыш равен $\delta_k > 0,$, в противном случае его выигрыш равен нулю. Найти значение игры и оптимальные стратегии игроков.

Домашнее задание

5. Петя и Вася хотят назначить Ане свидание. Никто из молодых людей не знает точно, когда она будет дома. Известно, что она с равной вероятностью может возвратиться домой в 3, 4 и 5 часов. Каждый может позвонить в один из этих часов. Дозвонившийся первым назначает свидание. Если оба позвонят одновременно, Аня отдаст предпочтение Пете. Выигрыш каждого из игроков — Пети и Васи — равен 1, если ему удастся назначить свидание, 0, если свидание не состоится и -1, если Аня идет на свидание с другим.
Составить матрицу выигрышей и найти оптимальные стратегии Пети и Васи, т.е. вероятности звонков в 3,4 и 5 часов соответственно.

Домашнее задание

6. Пусть элементы матрицы размера $m \times n$ являются независимыми одинаково распределенными величинами с плотностью вероятностей $f(x)$. Найти вероятность наличия в матрице седловой точки.

Домашнее задание

7. Имеется доска размером 3x3. На неглавной диагонали стоят числа $a_{13} = a_{22} = a_{31} = 0$. Остальные клетки свободны. У игрока 1 имеются фишки с числами 1,2,3. У игрока 2 – фишки с числами -1,-2,-3. По очереди, начиная с хода игрока 1, игроки ставят свои фишки в свободные клетки. После того как вся доска заполнена, игрок 1 выигрывает число, равное значению игры получившейся матрицы. Показать, что у игрока 1 есть стратегия, выбирая которую он никогда не проиграет (т.е. его выигрыш будет неотрицательный).