С-ядро и значение Шепли

Илья Кацев[1]

[1] Яндекс, НИУ ВШЭ

2017

Термины и обозначения

Кооперативная игра: пара (N, v), где N - конечное множество игроков и $v : 2^N \to \mathbb{R}$ - характеристическая функция, определенная для каждой коалиции $S \subset N$, причем величина $v(S)$ показывает, какой выигрыш могут обеспечить себе игроки из S в результате кооперации.

Решения кооперативных игр и их свойства

Кооперативная игра = проблема.

Решением называется функция σ, сопоставляющая каждой игре (N, v) множество ”справедливых” распределений прибыли $\sigma(N, v) \in \mathbb{R}^N$.

Решение σ называется одноточечным, если для любой игры (N, v) выполнено $|\sigma(N, v)| = 1$.

Решения кооперативных игр и их свойства

Пусть $\mathcal{G}$ - класс игр. Тогда решение σ удовлетворяет какому-либо свойству из списка ниже на классе $\mathcal{G}$, когда это свойство выполняется для всех игр $(N, v) \in \mathcal{G}$. Решение σ на классе $\mathcal{G}$ является

– непустым, если $\sigma(N, v) \neq \emptyset$;

Решения кооперативных игр и их свойства

Пусть $\mathcal{G}$ - класс игр. Тогда решение σ удовлетворяет какому-либо свойству из списка ниже на классе $\mathcal{G}$, когда это свойство выполняется для всех игр $(N, v) \in \mathcal{G}$. Решение σ на классе $\mathcal{G}$ является

- непустым, если $\sigma(N, v) \neq \emptyset$;
- эффективным, если $\sum_{i \in N} x_i(N, v) = v(N)$ для каждого $x \in \sigma(N, v)$;

Решения кооперативных игр и их свойства

Пусть $\mathcal{G}$ - класс игр. Тогда решение σ удовлетворяет какому-либо свойству из списка ниже на классе $\mathcal{G}$, когда это свойство выполняется для всех игр $(N, v) \in \mathcal{G}$. Решение σ на классе $\mathcal{G}$ является

- непустым, если $\sigma(N, v) \neq \emptyset$;
- эффективным, если $\sum_{i \in N} x_i(N, v) = v(N)$ для каждого $x \in \sigma(N, v)$;
- анонимным, если $\sigma_{\pi(i)}(\pi N, \pi v) = \sigma_i(N, v)$ для всех $i \in N$ и произвольной инъекции $\pi : N \to \mathcal{N}$.

Решения кооперативных игр и их свойства

Пусть $\mathcal{G}$ - класс игр. Тогда решение σ удовлетворяет какому-либо свойству из списка ниже на классе $\mathcal{G}$, когда это свойство выполняется для всех игр $(N, v) \in \mathcal{G}$. Решение σ на классе $\mathcal{G}$ является

- непустым, если $\sigma(N, v) \neq \emptyset$;
- эффективным, если $\sum_{i \in N} x_i(N, v) = v(N)$ для каждого $x \in \sigma(N, v)$;
- анонимным, если $\sigma_{\pi(i)}(\pi N, \pi v) = \sigma_i(N, v)$ для всех $i \in N$ и произвольной инъекции $\pi : N \to \mathcal{N}$.
- симметричным, если $x_i(N, v) = x_j(N, v)$ для любого $x \in \sigma(N, v)$ и симметричных в (N, v) игроков i и j;

Решения кооперативных игр и их свойства

Пусть $\mathcal{G}$ - класс игр. Тогда решение σ удовлетворяет какому-либо свойству из списка ниже на классе $\mathcal{G}$, когда это свойство выполняется для всех игр $(N, v) \in \mathcal{G}$. Решение σ на классе $\mathcal{G}$ является

- непустым, если $\sigma(N, v) \neq \emptyset$;
- эффективным, если $\sum_{i \in N} x_i(N, v) = v(N)$ для каждого $x \in \sigma(N, v)$;
- анонимным, если $\sigma_{\pi(i)}(\pi N, \pi v) = \sigma_i(N, v)$ для всех $i \in N$ и произвольной инъекции $\pi : N \to \mathcal{N}$.
- симметричным, если $x_i(N, v) = x_j(N, v)$ для любого $x \in \sigma(N, v)$ и симметричных в (N, v) игроков i и j;
- стандартным, если для игры любой игры двух лиц $(\{i, j\}, v)$

$$\sigma_i = v(\{i\}) + \frac{v(\{i,j\}) - v(\{i\}) - v(\{j\})}{2},$$

$$\sigma_j = v(\{j\}) + \frac{v(\{i,j\}) - v(\{i\}) - v(\{j\})}{2}.$$

Решения кооперативных игр и их свойства

Решение σ на классе $\mathcal{G}$ является

– ковариантным, если оно ковариантно относительно стратегических преобразований:

$$\sigma(N, \alpha v + \beta) = \alpha\sigma(N, v) + \beta$$

для всех $\alpha > 0$ и $\beta \in \mathbb{R}^N$;

– непрерывным, если из того, что $x_n \in \sigma(N, v_n)$ и $x_n \to x$ при $n \to \infty$ следует, что $x \in \sigma(N, v)$, где $(N, v_n)_{n=1}^{\infty}$ - последовательность игр в $\mathcal{G}$, $v_n \to v$ и $(N, v) \in \mathcal{G}$;

– обладает свойством нулевого игрока, если $x_i = 0$ для всех $x \in \sigma(N, v)$, где i - нулевой игрок в (N, v).

Одноточечное решение σ на $\mathcal{G}$ называется

– аддитивным, если $\sigma_i(N, v + w) = \sigma_i(N, v) + \sigma_i(N, w)$ для любых двух таких игр $(N, v),\ (N, w) \in \mathcal{G}$, что $(N, v + w) \in \mathcal{G}$.

Свойства согласованности

Согласованность решения σ означает, что если выигрыши игроков определены согласно σ, а зачем часть игроков покинула игру с этими выигрышами, то для оставшихся распределение согласно σ не изменится.

С-ядро

Множество эффективных векторов выигрышей:

$$X(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N)\}.$$

Определение

С-ядро C сопоставляет каждой игре (N, v) следующее множество векторов выигрышей (N, v):

$$C(N, v) = \{x \in X(N, v) : \forall S \subset N \ \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)\}.$$

С-ядро может быть пустым.

Выпуклые игры

Игра (N, v) является выпуклой, если для любых коалиций $S, T \subset N$

$$v(S \cap T) + v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

В выпуклой игре С-ядро непусто.

Выпуклые игры

Теорема (Shapley, 1971)

Если игра (N, v) выпуклая, то все векторы маргинальных вкладов лежат в С-ядре.

Выпуклые игры

Теорема (Shapley, 1971)

Если игра (N, v) выпуклая, то все векторы маргинальных вкладов лежат в С-ядре.

Теорема (Ichiishi, 1981)

Если в игре (N, v) все векторы маргинальных вкладов лежат в С-ядре, то игра выпукла.

Сбалансированность

Набор коалиций $\mathcal{B} \subset 2^N$ называется сбалансированным, если существуют такие положительные числа $\{\lambda_S\}_{S \in \mathcal{B}}$, что для любого элемента $i \in N$ выполнено

$$\sum_{i \in S \in \mathcal{B}} \lambda_S = 1.$$

Сбалансированность

Набор коалиций $\mathcal{B} \subset 2^N$ называется сбалансированным, если существуют такие положительные числа $\{\lambda_S\}_{S \in \mathcal{B}}$, что для любого элемента $i \in N$ выполнено

$$\sum_{i \in S \in \mathcal{B}} \lambda_S = 1.$$

Теорема (Бондарева, 1963, Шепли, 1967)

Для того, чтобы С-ядро в игре (N, v) было непусто, необходимо и достаточно, чтобы для любого минимального сбалансированного набора $\mathcal{B}$ выполнялось неравенство:

$$\sum_{S \in \mathcal{B}} \lambda_S v(S) \leq v(N).$$

Значение Шепли

Определение

Значение Шепли Sh сопоставляет каждой игре (N, v) следующий вектор выигрышей $Sh(N, v)$:

$$Sh_i(N, v) = \sum_{\{S \subseteq N, i \in S\}} \frac{(|N| - |S|)!(|S| - 1)!}{|N|!} \left(v(S) - v(S \setminus \{i\})\right), \; i \in N.$$

Значение Шепли

Определение

Значение Шепли Sh сопоставляет каждой игре (N, v) *следующий вектор выигрышей* $Sh(N, v)$*:*

$$Sh_i(N, v) = \sum_{\{S \subseteq N, i \in S\}} \frac{(|N| - |S|)!(|S| - 1)!}{|N|!} \left(v(S) - v(S \setminus \{i\})\right), \ i \in N.$$

Теорема

Для любой игры значение Шепли является среднем арифметическим векторов маргинальных вкладов в данной игре.

Значение Шепли: аксиоматизации

Теорема (Shapley, 1953)

Значение Шепли является единственным одноточечным решением, обладающим свойствами аддитивности, симметричности, эффективности и свойством ”болвана”.

Значение Шепли: аксиоматизации

Теорема (Shapley, 1953)

Значение Шепли является единственным одноточечным решением, обладающим свойствами аддитивности, симметричности, эффективности и свойством "болвана".

Теорема (Keane, 1969)

Для любой игры (N, v),

$$Sh(N, v) = \arg \min_{x \in X(N,v)} \sum_{S \subset N} (|S| - 1)!(|N| - |S| - 1)! \left(v(S) - x(S)\right)^2 .$$

Значение Шепли: аксиоматизации

Теорема (Hart, Mas-Collel, 1989)

Существует единственное такое эффективное одноточечное решение σ, что найдется такая функция $P : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$, что для любой игры $(N, v) \in \mathcal{G}$

$$\sigma_i(N, v) = P(N, v) - P(N \setminus \{i\}, v) \text{ для всех } i \in N.$$

Это значение Шепли

Значение Шепли: аксиоматизации

Харт и Мас-Коллел описали значение Шепли через согласованность:
Для игры (N, v) и коалиции $S \subset N$ редуцированная игра (S, v_σ^S) (для одноточечного решения σ задается следующим образом):

$$v_\sigma^S(T) = v(T \cup N \setminus S) - \sum_{i \in N \setminus S} \sigma_i(T \cup N \setminus S, v).$$

Теорема (Hart, Mas-Collel, 1989)

Значение Шепли является единственным одноточечным значением, удовлетворяющим стандартности и согласованности.

Свойство сбалансированных вкладов

Будем говорить, что решение σ обладает свойством сбалансированных вкладов, если для любой игры (N, v) и для любой пары игроков $i, j \in N$ выполнено:

$$\sigma_i(N, v) - \sigma_i(N \setminus \{j\}) = \sigma_j(N, v) - \sigma_j(N \setminus \{i\})$$

Теорема (Майерсон,1977)

Существует только одно эффективное решение, обладающее свойством сбалансированных вкладов - это значение Шепли.

Монотонность

Определение

Одноточечное решение σ *коалиционно монотонно, если для любых двух игр* (N, v), (N, w), *для которых существует такая коалиция* $S \subset N$, *что*

1. $w(S) > v(S)$

2. $v(T) = w(T)$ *для всех* $T \neq S$

выполняется $\sigma_i(N, w) \geq \sigma_i(N, v)$ *для всех* $i \in S$.

Монотонность

Определение

Одноточечное решение σ *коалиционно монотонно, если для любых двух игр* $(N, v), (N, w)$*, для которых существует такая коалиция* $S \subset N$*, что*
1. $w(S) > v(S)$
2. $v(T) = w(T)$ *для всех* $T \neq S$
выполняется $\sigma_i(N, w) \geq \sigma_i(N, v)$ *для всех* $i \in S$.

Определение

Одноточечное решение σ *сильно монотонно, если для любых двух игр* $(N, v), (N, w)$*, для которых существует такой игрок* $i \in N$*, что для любой коалиции* S *верно* $w(S \cup \{i\}) - w(S) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S)$ *выполняется* $\sigma_i(N, w) \geq \sigma_i(N, v)$.

Монотонность

Определение

Одноточечное решение σ коалиционно монотонно, если для любых двух игр $(N, v), (N, w)$, для которых существует такая коалиция $S \subset N$, что
1. $w(S) > v(S)$
2. $v(T) = w(T)$ для всех $T \neq S$
выполняется $\sigma_i(N, w) \geq \sigma_i(N, v)$ для всех $i \in S$.

Определение

Одноточечное решение σ сильно монотонно, если для любых двух игр $(N, v), (N, w)$, для которых существует такой игрок $i \in N$, что для любой коалиции S верно $w(S \cup \{i\}) - w(S) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S)$ выполняется $\sigma_i(N, w) \geq \sigma_i(N, v)$.

Теорема (Янг, 1985)

Существует только одно эффективное, симметричное и сильно монотонное решение решение - это значение Шепли.

Домашнее задание

27. Докажите теорему Бондаревой-Шепли:
Для того, чтобы С-ядро в игре (N, v) было непусто, необходимо и достаточно, чтобы для любого минимального сбалансированного набора $\mathcal{B}$ выполнялось неравенство:

$$\sum_{S \in \mathcal{B}} \lambda_S v(S) \leq v(N).$$

Домашнее задание

28. Пусть N - множество из 5 элементов. Существует ли минимальный сбалансированный набор $\mathcal{B} \subset 2^N$, в котором

а. Больше 5 элементов

б. Больше 6 элементов

Домашнее задание

29. Имеется комитет, состоящий из 4 человек: A,B,C,D, A является председателем. Комитет принимает решение по правилу большинства, но в случае ничьей 2–2 принимается решение, за которое голосует председатель. Перечислить выигрывающие коалиции и найти значение Шепли в соответствующей простой игре.

Домашнее задание

30. Докажите, что любая игра банкротства является выпуклой.

Домашнее задание

31. а. Докажите, что в выпуклой игре значение Шепли лежит в С-ядре.

б. Верно ли это для произвольной супераддитивной игры?

Домашнее задание

32. Докажите теорему Янга:

Теорема (Янг, 1985)

Существует только одно эффективное, симметричное и строго монотонное решение решение - это значение Шепли.

Разбор д/з

23. Докажите, что арбитражное решение Нэша не является монотонным (то есть не удовлетворяет аксиоме 6).

Разбор д/з

24. Рассмотрим усиленную аксиому монотонности (отбрасываем условие $I(X_1, d) = I(X_2, d)$):

6. *Ограниченная монотонность.* Пусть две АС $B_1 = (X_1, d)$, $B_2 = (X_2, d)$, таковы, что $X_1 \subset X_2$. Тогда

$$\varphi(X_1, d) \leq \varphi(X_2, d)$$

Докажите, что не существует арбитражного решения, удовлетворяющего аксиомам 1,3,4 и новой аксиоме монотонности 6.

Разбор д/з

25.

а. Верно ли, что любая игра банкротства является супераддитивной?

б. Верно ли, что в игре банкротства игрок является болваном в том и только в том случае, если его вес равен 0?

Разбор д/з

26. Верно ли, что любая простая (кооперативная) игра является взвешенно мажоритарной?