Лекция 5. Лемма Неймана-Пирсона. Две гипотезы: нулевая простая, альтернативная сложная. Последовательный критерий Вальда

Буре В.М., Грауэр Л.В.

ШАД

Санкт-Петербург, 2013

Содержание

Проверка двух простых статистических гипотез

Под *статистической гипотезой* принято понимать любое предположение о законе распределения генеральной совокупности. Статистическая гипотеза называется *простой*, если при условии истинности гипотезы закон распределения генеральной совокупности однозначно определен, в противном случае гипотеза называется *сложной*.

Пусть задана выборка $X_{[n]}$ из генеральной совокупности ξ с функцией распределения $F_\xi(x)$. Пусть имеется две простые гипотезы:

- $H_0 : F_\xi(x) = F_0(x)$.
- $H_1 : F_\xi(x) = F_1(x)$.

Причем, функции $F_0(x)$ и $F_1(x)$ полностью известны. По выборке $X_{[n]}$ требуется принять решение об истинности нулевой гипотезы H_0 при альтернативной гипотезе H_1.

Выборка $X_{[n]}$ — точка из пространства $\mathbb{R}^n$. Выделим множество $S \subset \mathbb{R}^n$ — критическую область для гипотезы H_0, тогда можно сформулировать правило проверки гипотезы H_0 при альтернативе H_1:

- Если $X_{[n]} \in S$, то отвергаем гипотезу H_0, принимаем H_1.
- Если $X_{[n]} \notin S$, то принимаем гипотезу H_0, отвергаем H_1.

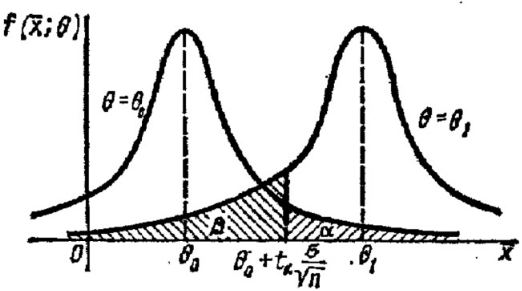
Правило проверки статистической гипотезы при некоторой фиксированной альтернативе принято называть *статистическим критерием*.

За исключением тривиальных ситуаций сформулированное правило не может всегда приводить к правильным решениям. Возможны два типа ошибок:

1. *Ошибка первого рода* — отклонить гипотезу H_0, когда она верна, вероятность ошибки первого рода $\alpha(S)$ определяется равенством:
$$\alpha(S) = P\left\{X_{[n]} \in S / H_0\right\} = P_0\left\{X_{[n]} \in S\right\}.$$
2. *Ошибка второго рода* — принять гипотезу H_0, когда верна H_1, вероятность ошибки второго рода $\beta(S)$ определяется равенством:
$$\beta(S) = P\left\{X_{[n]} \notin S / H_1\right\} = P_1\left\{X_{[n]} \notin S\right\}.$$

Также будем рассматривать вероятность
$$\gamma(S) = 1 - \beta(S) = P_1\left\{X_{[n]} \in S\right\},$$
вероятность $\gamma(S)$ называют *мощностью критерия*.

Истинная гипотеза	Результат принятия решения	
	H_0 отклонена	H_0 принята
H_0	α	$1-\alpha$
H_1	$1-\beta$	β



Если $\gamma(S) < \alpha(S)$, то попасть в S при условии истинности гипотезы H_1 труднее, чем при условии истинности гипотезы H_0, т. е. S — критическая область скорее для H_1. Следовательно, неравенство должно иметь вид:

$$\gamma(S) > \alpha(S),$$

т. е. S следует выбирать так, чтобы выполнялось это неравенство.

Определение 1

Критерий называется несмещенным, если выполняется условие

$$\alpha(S) \leqslant \gamma(S) = 1 - \beta(S).$$

В большинстве задач гипотезы H_0 и H_1 не равноправны. Поэтому в дальнейшем изложении будем считать, что H_0 — *основная гипотеза*, H_1 — *альтернативная гипотеза*.

Зададим α_0 и будем иметь дело только с такими критериями, где $\alpha_0 \geqslant \alpha(S)$ (т. е. вероятность ошибки первого рода не превосходит величины α_0) и дополнительно будем решать задачу: $\beta(S) \to \min\limits_S$.

Получаем две эквивалентные задачи определения критической области S:

$$\begin{cases} \alpha_0 \geqslant \alpha(S), \\ \beta(S) \to \min\limits_S . \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 \geqslant \alpha(S), \\ \gamma(S) \to \max\limits_S . \end{cases}$$

Задачи в такой постановке не всегда решаемы, так как требуется ответить точно «да» или «нет». Такие статистические критерии называются *нерандомизированными критериями*.

Можно рассмотреть функцию $\varphi(x) = I\{x \in S\}$. Тогда нерандомизированный критерий примет вид:

- Если $\varphi(X_{[n]}) = 1$, тогда отвергаем гипотезу H_0, принимаем H_1.
- Если $\varphi(X_{[n]}) = 0$, тогда принимаем гипотезу H_0, отвергаем H_1.

Функцию φ принято называть *критической функцией*.

Пусть теперь φ не является индикатором множества S, и

$$\varphi(x) = P\left\{\bar{H}_0 / X_{[n]} = x\right\},$$

тогда $\varphi(X_{[n]}) \in [0,1]$ — условная вероятность отклонения гипотезы H_0. При таком определении $\varphi(x)$ приходим к *рандомизированному критерию*, то есть, критерию, который при некоторых значениях x может не давать ответа «да» или «нет» в отношении истинности нулевой гипотезы H_0.

Тогда

- с вероятностью $1 - \varphi(X_{[n]})$ следует принимать гипотезу H_0 и
- с вероятностью $\varphi(X_{[n]})$ принимать гипотезу H_1.

При использовании введенного обозначения вероятность ошибки первого рода, вероятность ошибки второго рода и мощность критерия будем обозначать: $\alpha(\varphi)$, $\beta(\varphi)$ и $\gamma(\varphi) = 1 - \beta(\varphi)$ соответственно. Определение 1 можно переформулировать в новых терминах, критерий называется несмещенным, если $\alpha(\varphi) \leqslant \gamma(\varphi)$.

Без ограничения общности будем предполагать, что существует плотность $f_0(x)$ для функции распределения $F_0(x)$, и существует плотность $f_1(x)$ для функции распределения $F_1(x)$.
(В дискретном случае все результаты аналогичны.)

В дальнейшем будем считать, что плотности $f_i(x)$, $i = 0, 1$, определены относительно сигма-конечной меры μ. Если в качестве меры μ рассматривается мера Лебега, то плотности распределения представляют собой обычные плотности распределения. Если в качестве меры μ рассматривается «считающая» мера, тогда плотности распределения являются вероятностями, что соответствует дискретному случаю. При этом, в любом случае

$$F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(t)\mu(dt), \quad i = 0, 1.$$

Функция правдоподобия выборки (совместная плотность выборки) при справедливости гипотезы H_0 имеет вид:

$$L_0(X_{[n]}) = \prod_{i=1}^{n} f_0(X_i).$$

Если верна гипотеза H_1, то функция правдоподобия имеет вид:

$$L_1(X_{[n]}) = \prod_{i=1}^{n} f_1(X_i).$$

Для рандомизированного критерия получаем

$$P_0(\bar{H}_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) L_0(x) \mu^n(dx) = \alpha(\varphi),$$

$$P_1(H_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1 - \varphi(x)) L_1(x) \mu^n(dx) = \beta(\varphi),$$

$$\gamma(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) L_1(x) \mu^n(dx), \quad \gamma(\varphi) = 1 - \beta(\varphi).$$

Тогда задача построения статистического критерия сводится к нахождению критической функции $\varphi(x)$ и будет формулироваться следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha_0 \geqslant \alpha(\varphi), \\ \beta(\varphi) \longrightarrow \min\limits_{\varphi}. \end{cases}$$

Эквивалентная формулировка имеет вид:

$$\begin{cases} \alpha_0 \geqslant \alpha(\varphi), \\ \gamma(\varphi) \longrightarrow \max\limits_{\varphi}. \end{cases}$$

Таким образом, задача заключается в том, чтобы найти наиболее мощный критерий, когда вероятность ошибки первого рода не превосходит некоторого заданного порогового значения. Решение сформулированных задач дается леммой Неймана-Пирсона.

Лемма 1 (Лемма Неймана-Пирсона)

Пусть $\alpha_0 \in (0,1)$, тогда при фиксированной вероятности ошибки первого рода α_0 наиболее мощный критерий имеет критическую функцию φ^* вида

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } L_1(x) > cL_0(x); \\ \varepsilon, & \text{если } L_1(x) = cL_0(x); \\ 0, & \text{если } L_1(x) < cL_0(x), \end{cases}$$

где $L_0(x) = \prod_{i=1}^{n} f_0(x_i)$ соответствует гипотезе H_0, $L_1(x) = \prod_{i=1}^{n} f_1(x_i)$ — гипотезе H_1. Константы c и ε — решения уравнения $\alpha(\varphi^*) = \alpha_0$.

Доказательство
Покажем, что константы c и ε могут быть найдены из уравнения $\alpha(\varphi^*) = \alpha_0$. Заметим, что

$$\alpha(\varphi^*) = P_0\{L_1(X_{[n]}) > cL_0(X_{[n]})\} + \varepsilon P_0\left\{L_1(X_{[n]}) = cL_0(X_{[n]})\right\} = \\ = P_0\left\{\frac{L_1(X_{[n]})}{L_0(X_{[n]})} > c\right\} + \varepsilon P_0\left\{\frac{L_1(X_{[n]})}{L_0(X_{[n]})} = c\right\} \quad (1)$$

Может ли быть так, что $L_0(X_{[n]}) = 0$?
Да, может, но тогда

$$P_0\{L_0(X_{[n]}) = 0\} = \int\limits_{\{x:\ L_0(x)=0\}} L_0(x)\mu(dx) = 0$$

и, следовательно, равенство (1) корректно. Поэтому рассмотрим случайную величину $\eta(X_{[n]}) = L_1(X_{[n]})/L_0(X_{[n]})$.

Положим $F_{H_0,\eta}(t) = P\{\eta \leqslant t\}$, тогда

$$\alpha(\varphi^*) = 1 - F_{H_0,\eta}(c) + \varepsilon(F_{H_0,\eta}(c) - F_{H_0,\eta}(c-0)).$$

Пусть $g(c) = 1 - F_{H_0,\eta}(c)$, константу c_{α_0} можно выбрать так, чтобы было выполнено неравенство:

$$g(c_{\alpha_0}) \leqslant \alpha_0 \leqslant g(c_{\alpha_0} - 0),$$

если $g(c_{\alpha_0}) = g(c_{\alpha_0} - 0)$, то положим $\varepsilon_{\alpha_0} = 0$, если $g(c_{\alpha_0}) < g(c_{\alpha_0} - 0)$, то в качестве ε_{α_0} выберем следующую величину:

$$\varepsilon_{\alpha_0} = \frac{\alpha_0 - g(c_{\alpha_0})}{g(c_{\alpha_0} - 0) - g(c_{\alpha_0})} \in [0, 1].$$

Нетрудно заметить, что в обоих случаях выполнено равенство:

$$\alpha_0 = g(c_{\alpha_0}) + \varepsilon_{\alpha_0}(g(c_{\alpha_0} - 0) - g(c_{\alpha_0})) = \alpha(\varphi^*).$$

Докажем, что $\varphi^*(x)$ — критическая функция наиболее мощного критерия. Выберем любую другую критическую функцию $\tilde{\varphi}(x)$ такую, что $\alpha(\tilde{\varphi}) \leqslant \alpha_0$ и сравним ее с критической функцией φ^*. Заметим, что для любого x справедливо неравенство:

$$(\varphi^*(x) - \tilde{\varphi}(x))(L_1(x) - c_{\alpha_0} L_0(x)) \geqslant 0.$$

Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varphi^*(x) - \tilde{\varphi}(x))(L_1(x) - c_{\alpha_0} L_0(x))\mu^n(dx) \geqslant 0.$$

Раскроем скобки и преобразуем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^*(x) L_1(x)\mu^n(dx) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(x) L_1(x)\mu^n(dx) \geqslant$$

$$\geqslant c_{\alpha_0} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^*(x) L_0(x)\mu^n(dx) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(x) L_0(x)\mu^n(dx) \right) \geqslant 0.$$

Следовательно, $\gamma(\varphi^*) - \gamma(\tilde{\varphi}) \geqslant c_{\alpha_0}(\alpha(\varphi^*) - \alpha(\tilde{\varphi}))$, откуда получаем неравенство:

$$\gamma(\varphi^*) \geqslant \gamma(\tilde{\varphi}).$$

Лемма доказана

Простые гипотезы о параметрах нормального и биномиального распределений

Нормальное распределение

Пусть задана генеральная совокупность ξ, выборка $X_{[n]}$ из этой генеральной совокупности, имеются две гипотезы о распределении генеральной совокупности $N(a_0, \sigma^2)$, $N(a_1, \sigma^2)$, где a_0, a_1 известны. Также считаем, что σ^2 известна. Пусть для определенности $a_1 > a_0$. Т.е. имеем две гипотезы:

- $H_0 : a = a_0$.
- $H_1 : a = a_1 > a_0$.

Без ограничения общности считаем, что $a_1 > a_0$.

Применим критерий Неймана-Пирсона. Выпишем функции правдоподобия для каждой гипотезы:

$$L_0(X_{[n]}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - a_0)^2},$$

$$L_1(X_{[n]}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - a_1)^2}.$$

Рассмотрим отношение:

$$\frac{L_1(X_{[n]})}{L_0(X_{[n]})} = \exp\frac{1}{2\sigma^2}\left\{2(a_1 - a_0)n\bar{X} - n(a_1^2 - a_0^2)\right\}.$$

Нетрудно заметить, что $L_1(X_{[n]})/L_0(X_{[n]}) > c$ тогда и только тогда, когда $\bar{X} > c_1$.

Поэтому оптимальный критерий Неймана-Пирсона выглядит следующим образом:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \bar{X} > c_1; \\ \varepsilon, & \bar{X} = c_1; \\ 0, & \bar{X} < c_1, \end{cases}$$

при этом константы c_1 и ε выбираются при заданном $\alpha_0 \in (0, 1)$ как решение уравнения $\alpha_0 = \alpha(\varphi^*)$.

Так как при справедливости гипотезы H_0 распределение статистики $\bar{X}$ является нормальным, то $P\{\bar{X} = c_1\} = 0$, поэтому можно положить $\varepsilon = 0$, тогда

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \bar{X} > c_1; \\ 0, & \bar{X} \leqslant c_1. \end{cases}$$

В этом случае всегда $g(c_{\alpha_0}) = g(c_{\alpha_0} - 0)$, поэтому можно выбрать $\varepsilon = 0$. Оптимальный критерий является нерандомизированным.

Зададим вероятность ошибки первого рода α_0:

$$\alpha_0 = \alpha(\varphi^*) = P_0\{\bar{X} > c_1\} = P_0\left\{\frac{\bar{X} - a_0}{\sigma}\sqrt{n} > \frac{c_1 - a_0}{\sigma}\sqrt{n}\right\} =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{c_1 - a_0}{\sigma}\sqrt{n}\right),$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения, соответствующая стандартному нормальному распределению,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Таким образом, получили уравнение:

$$\Phi\left(\frac{c_1 - a_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) = 1 - \alpha_0.$$

Его решением является квантиль уровня $1 - \alpha_0$ стандартного нормального распределения $z_{1-\alpha_0} = \sqrt{n}(c_1 - a_0)/\sigma$. Равенство

$$\alpha(\varphi^*) = \alpha_0 \tag{2}$$

будет выполнено, если выбрать $c_1 = a_0 + z_{1-\alpha_0}\sigma/\sqrt{n}$ и, следовательно, критическая область для нулевой гипотезы H_0 при использовании статистики $\bar{X}$ имеет следующий вид:

$$S = \left(a_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha_0}; +\infty\right).$$

Если $\bar{X} \in S$, то гипотезу H_0 следует отклонить, если $\bar{X} \notin S$, то гипотезу H_0 следует принять. Оптимальный критерий в данном случае является нерандомизированным.

Если выберем

$$c_1 \geqslant a_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha_0}, \tag{3}$$

то вероятность ошибки первого рода будет удовлетворять неравенству $\alpha(\varphi^*) \leqslant \alpha_0$. Введем в рассмотрение ошибку второго рода β. Зададим уровень ошибки второго рода β_0 и выясним условия, когда $\beta(\varphi^*) \leqslant \beta_0$:

$$\beta(\varphi^*) = P_1\{\bar{X} \leqslant c_1\} = \\ = P_1\left\{\frac{\bar{X} - a_1}{\sigma}\sqrt{n} \leqslant \frac{c_1 - a_1}{\sigma}\sqrt{n}\right\} = \Phi\left\{\frac{c_1 - a_1}{\sigma}\sqrt{n}\right\}.$$

Неравенство $\beta(\varphi^*) \leqslant \beta_0$ окажется выполненным, если

$$\frac{c_1 - a_1}{\sigma}\sqrt{n} \leqslant z_{\beta_0},$$

где z_{β_0} — квантиль стандартного нормального распределения уровня β_0.

Из последнего неравенства получаем:

$$c_1 \leqslant a_1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\beta_0}. \tag{4}$$

Константа c_1, для которой выполнены неравенства (3) и (4) может быть выбрана, если имеет место неравенство:

$$a_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha_0} \leqslant a_1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\beta_0}.$$

Преобразуя последнее неравенство, получим

$$n \geqslant \frac{\sigma^2 (z_{1-\alpha_0} - z_{\beta_0})^2}{(a_1 - a_0)^2}. \tag{5}$$

Таким образом, при объеме выборки n, удовлетворяющем неравенству (5), будут выполнены условия: $\alpha(\varphi^*) \leqslant \alpha_0$ и $\beta(\varphi^*) \leqslant \beta_0$.

Предположим, что известно математическое ожидание a.
Сформулируем гипотезы:

- $H_0 : \sigma = \sigma_0$.
- $H_1 : \sigma = \sigma_1 > \sigma_0$.

Без ограничения общности считаем, что $\sigma_1 > \sigma_0$, σ_0 и σ_1 известны.
Статистический критерий проверки гипотезы H_0 при альтернативе H_1 основан на статистике отношения правдоподобия, как следует из леммы Неймана-Пирсона. Выпишем функции правдоподобия:

$$L_0(X_{[n]}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma_0^n} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-a)^2},$$

$$L_1(X_{[n]}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma_1^n} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-a)^2}.$$

Тогда неравенство

$$\frac{L_1(X_{[n]})}{L_0(X_{[n]})} = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n e^{\left(\frac{1}{2\sigma_0^2} - \frac{1}{2\sigma_1^2}\right)\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - a)^2} > c$$

равносильно неравенству:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 > c_1.$$

Ранее было показано, что статистика $\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2$ подчиняется распределению хи-квадрат с n степенями свободы при условии справедливости гипотезы H_0. Следовательно, вероятность $P_0(\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 = c_1)$ равна нулю при любом значении константы c_1, поэтому в оптимальном критерии можно положить $\varepsilon = 0$.
Поэтому критерий имеет вид:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 > c_1; \\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 \leqslant c_1, \end{cases}$$

и, оказывается, нерандомизированным.

Выберем константу так, чтобы выполнялось равенство: $\alpha(\varphi^*) = \alpha_0$. Нетрудно заметить, что

$$\alpha(\varphi^*) = P_0\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 > c_1\right\} =$$

$$= P_0\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - a}{\sigma_0}\right)^2 > \frac{c_1}{\sigma_0^2}\right\} = 1 - F_{\chi_n^2}\left(\frac{c_1}{\sigma_0^2}\right),$$

где $F_{\chi_n^2}(\cdot)$ — функция распределения закона хи-квадрат с n степенями свободы. Решением уравнения $F_{\chi_n^2}\left(c_1/\sigma_0^2\right) = 1 - \alpha_0$ является квантиль распределения χ^2 с n степенями свободы, то есть $u_{1-\alpha_0,n}$.

Критическая область для гипотезы H_0 выглядит следующим образом:

- Если $\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 \in (\sigma_0^2 u_{1-\alpha_0,n}; +\infty) = S$, то гипотеза H_0 отклоняется.
- Если $\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 \in [0; \sigma_0^2 u_{1-\alpha_0,n}]$, то гипотеза H_0 принимается.

Оптимальный критерий является нерандомизированным критерием.

Биномиальное распределение

Теперь рассмотрим случай, когда проверяется гипотеза о параметре биномиального распределения. Рассмотрим схему Бернулли. Выборка $X_{[n]}$ состоит из нулей и единиц, единицы соответствуют успехам. Тогда вероятность того, что в серии из n испытаний произойдет ровно m успехов равна

$$P_n\{\xi = m\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m},$$

где n — число испытаний, p — вероятность успеха, m — число успехов. Сформулируем гипотезы:

- $H_0 : p = p_0$.
- $H_1 : p = p_1 > p_0$.

Как и в предыдущих примерах, без ограничения общности считаем, что $p_1 > p_0$, p_1 и p_0 известны.

Применим оптимальный критерий Неймана-Пирсона. Выпишем функции правдоподобия для каждой гипотезы:

$$L_1(m) = C_n^m p_1^m (1-p_1)^{n-m},$$
$$L_0(m) = C_n^m p_0^m (1-p_0)^{n-m}.$$

Неравенство

$$\frac{L_1(m)}{L_0(m)} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^m \left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{n-m} > c$$

эквивалентно неравенству:

$$\left(\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}\right)^m \left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^n > c,$$

или эквивалентно неравенству: $m > c_1$. Следовательно, оптимальную критическую функцию можно записать в виде:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & m > c_1; \\ \varepsilon, & m = c_1; \\ 0, & m < c_1. \end{cases}$$

Оптимальный критерий является рандомизированным. Константы c_1 и ε нужно выбирать из условия: $\alpha(\varphi^*) = \alpha_0$. Воспользуемся асимптотикой:

$$\alpha(\varphi^*) = P_0\{m > c_1\} + \varepsilon P_0\{m = c_1\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \Phi\left(\frac{c_1 - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right).$$

Решением уравнения

$$\Phi\left(\frac{c_1 - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right) = 1 - \alpha_0$$

является квантиль стандартного нормального распределения уровня $1 - \alpha_0$:

$$z_{1-\alpha_0} = \frac{c_1 - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}.$$

Из полученного условия можно найти константу c_1:

$$c_1 = np_0 + \sqrt{np_0(1-p_0)}z_{1-\alpha_0}.$$

Критическая область для гипотезы H_0 имеет вид $(c_1; \infty)$. Таким образом, построен статистический критерий:

- Если $m \in (np_0 + \sqrt{np_0(1-p_0)}z_{1-\alpha_0}; +\infty)$, то гипотеза H_0 отклоняется.
- Если $m \in [0; np_0 + \sqrt{np_0(1-p_0)}z_{1-\alpha_0}]$, то гипотеза H_0 принимается.

Построенный критерий является нерандомизированным, однако, в отличие от предыдущих примеров, построенный критерий не является точным. Нельзя утверждать, что вероятность ошибки первого рода равна α_0. Для выборок большого объема вероятность ошибки первого рода окажется приближенно равной α_0.

Гипотезы о параметрах распределений для сложных альтернатив

Пусть заданы генеральная совокупность ξ и выборка $X_{[n]}$ из генеральной совокупности.
Сформулируем две гипотезы о распределении генеральной совокупности:

- генеральная совокупность ξ подчиняется нормальному распределению $N(a_0, \sigma^2)$, и
- генеральная совокупность ξ подчиняется нормальному распределению $N(a_1, \sigma^2)$,

где a_1 **неизвестно**, a_0 **известно**, также считаем, что σ^2 **известна**.

Будем предполагать, что $a_1 > a_0$.

Таким образом, имеем две гипотезы:

- $H_0 : a = a_0$.
- $H_1 : a > a_0$.

Гипотезу H_1 можно записать в виде: $a = a_1 > a_0$, a_1 неизвестно. Гипотеза H_1 представляет собой правостороннюю альтернативу. Оптимальный критерий имеет вид:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \bar{X} > c_1; \\ 0, & \bar{X} \leqslant c_1, \end{cases}$$

где c_1 находится из уравнения:

$$\alpha_0 = P_0\{\bar{X} > c_1\},$$

где α_0 — вероятность ошибки первого рода (уровень значимости критерия). Как показано в предыдущем параграфе:

$$c_1 = a_0 + z_{1-\alpha_0}\sigma/\sqrt{n}.$$

Критерий Неймана-Пирсона является равномерно наиболее мощным критерием для проверки гипотезы $H_0 : a = a_0$ при альтернативе $H_1 : a > a_0$, то есть, он не зависит от конкретного значения a_1, и является наиболее мощным при любом $a_1 > a_0$.
Результат полностью сохраняется для левосторонней альтернативы $a = a_1 < a_0$ при соответствующих изменениях.
Для двусторонней альтернативы не удается построить равномерно наиболее мощный критерий.
Рассмотрим двустороннюю альтернативу:

- $H_0 : a = a_0$.
- $H_1 : a \neq a_0$.

Как и раньше фиксируем вероятность ошибки первого рода α_0. В качестве статистики критерия возьмем $\bar{X}$. В предположении истинности нулевой гипотезы выберем константу c_1 из условия:

$$P_0\{|\bar{X} - a_0| > c_1\} = \alpha_0.$$

Критическая область для гипотезы H_0 при двусторонней альтернативе H_1 при использовании статистики $\bar{X}$ имеет вид:

$$S = \{x: \ |x - a_0| > c_1\}.$$

Выберем вероятность ошибки первого рода:

$$P\{\bar{X} \in S/H_0\} = \alpha_0.$$

Преобразуем выражение:

$$P_0\left\{\frac{\sqrt{n}|\bar{X} - a_0|}{\sigma} \geqslant \frac{\sqrt{n}c_1}{\sigma}\right\} = \alpha_0.$$

Пусть $\eta = \sqrt{n}(\bar{X} - a_0)/\sigma$, тогда при условии справедливости гипотезы H_0 случайная величина η подчиняется стандартному нормальному распределению $N(0,1)$. Следовательно, в качестве c_1 можно выбрать

$$c_1 = z_{1-\frac{\alpha_0}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $z_{1-\frac{\alpha_0}{2}}$ — квантиль стандартного нормального распределения уровня $1 - \alpha_0/2$.

Критическая область для нулевой гипотезы при использовании статистики $\bar{X}$ принимает следующий вид:

$$S = (-\infty; a_0 - c_1) \cup (a_0 + c_1; +\infty).$$

Критерий проверки таков:

- Если $\bar{X} \in S$, то гипотеза H_0 отклоняется.
- Если $\bar{X} \notin S$, то гипотеза H_0 принимается.

Теперь рассмотрим случай, когда σ^2 **неизвестна**.
Рассмотрим правостороннюю альтернативу:

- $H_0 : a = a_0$.
- $H_1 : a > a_0$, то есть, $a = a_1 > a_0$, a_1 — неизвестно.

Вычислим статистику

$$t = \frac{\bar{X} - a_0}{\tilde{s}}\sqrt{n},$$

где $\tilde{s}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$.
При справедливости нулевой гипотезы статистика t должна подчиняться распределению Стьюдента с $n-1$ степенью свободы. Если верна альтернативная гипотеза H_1, то можно заметить, что статистика будет смещена вправо по отношению к распределению Стьюдента с $n-1$ степенью свободы.

Критическая область в данном случае для нулевой гипотезы будет иметь вид

$$S = \{t > c_1\} = (c_1; +\infty),$$

где константу c_1 следует выбирать из условия $P_0\{t > c_1\} = \alpha_0$.
Таким образом, $c_1 = t_{1-\alpha_0, n-1}$ — квантиль распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы уровня $1-\alpha_0$.
Критерий с вероятностью ошибки первого рода α_0 имеет вид:

- Если статистика $t \in (t_{1-\alpha_0, n-1}; +\infty)$, то отклоняем гипотезу H_0 в пользу H_1.
- Если статистика $t \in (-\infty; t_{1-\alpha_0, n-1}]$, то отклоняем гипотезу H_1 в пользу H_0.

Для левосторонней альтернативы критическая область для гипотезы H_0 при использовании статистики t будет следующей:

$$S = (-\infty; t_{\alpha_0, n-1}),$$

где $t_{\alpha_0, n-1}$ — квантиль уровня α_0 распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы.
Для двусторонней альтернативы критическая область с вероятностью ошибки первого рода α_0 для гипотезы H_0 при использовании статистики t будет следующей:

$$S = (-\infty; t_{\frac{\alpha_0}{2}, n-1}] \cup [t_{1-\frac{\alpha_0}{2}, n-1}; +\infty),$$

где $t_{\frac{\alpha_0}{2}, n-1}$ — квантиль уровня $\alpha_0/2$ распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы, $t_{1-\frac{\alpha_0}{2}, n-1}$ — квантиль уровня $1-\alpha_0/2$ того же распределения.

Последовательный критерий отношения правдоподобия (Критерий Вальда)

В отличие от классических методов математическои статистики, в которых число производимых экспериментов фиксируется заранее, методы последовательного анализа характеризуются тем, что момент прекращения наблюдении является случаиным и определяется наблюдателем в зависимости от значении наблюдаемых данных.
Пусть задана генеральная совокупность ξ с неизвестной функцией распределения F_ξ и выборка $X_{[n]} = (X_1, \dots, X_n)$.
Выдвинем нулевую гипотезу

$$H_0 : F_\xi = F_0$$

против альтернативной гипотезы

$$H_1 : F_\xi = F_1, F_1 \neq F_0.$$

$$F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(t)\mu(dt), \quad i = 0, 1.$$

Предположим, что статистическое решение принимается не на наблюдениях фиксированного объема n, а возможны дополнительные наблюдения.

Последовательный критерий отношения правдоподобия (SPRT) строится следующим образом.

Сначала выбирают критические границы c_0 и c_1 $(0 < c_0 < c_1 < \infty)$.

На каждом i-м этапе наблюдений, имея на этот момент выборку $X_{[i]} = (X_1, X_2, \ldots, X_i)$ объема i, вычисляют отношение функций правдоподобия

$$Z[X_{[i]}] = \frac{L(X_{[i]}, F_1)}{L(X_{[i]}, F_0)},$$

где $L(X_{[i]}, F_0)$ — функция правдоподобия при законе, соотвествующем гипотезе H_0, а $L(X_{[i]}, F_1)$ — при законе, соответствующем гипотезе H_1. и проверяют выполнение двустороннего неравества вида

$$c_0 \leq Z[X_{[i]}] \leq c_1. \tag{6}$$

1. Если $Z[X_{[i]}]$ находится внутри интервала $c_0 \leq Z[X_{[i]}] \leq c_1$, процесс наблюдений продолжается;
2. если $Z[X_{[i]}] < c_0$, то принимают гипотезу H_0;
3. если $Z[X_{[i]}] > c_1$, то принимают гипотезу H_1.

Определение 2

$SPRT(c_0, c_1)$ - решающее правило, предписывающее проведение наблюдений $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ до первого ν, при котором $Z[X_{[\nu]}] < c_0$ или $Z[X_{[\nu]}] > c_1$, принятие либо гипотезы H_0 при $Z[X_{[\nu]}] < c_0$ либо гипотезы H_1 при $Z[X_{[\nu]}] > c_1$.

Номер шага ν (*момент остановки*), при котором принимается одно из решений 2) или 3), определяет минимально необходимый для проверки гипотезы объем выборки.

Данная процедура характеризуется вероятностями ошибок первого $\alpha = P\{H_1|H_0\}$ и второго рода $\beta = P\{H_0|H_1\}$ и средним числом наблюдений ν до момента остановки $E_j(\nu) = E(\nu|H_j)$ $(j = 0, 1)$. Если вероятности ошибок α и β заданы, то любой критерий с такими ошибками называют *критерием силы* (α, β). В классе критериев данной силы (α, β) предпочтительным является тот, который требует меньшего числа наблюдений. Критерий, минимизирующий одновременно как $E_1(\nu)$, так и $E_0(\nu)$, называют *оптимальным*. Критерий Вальда обладает свойством оптимальности. В частности, критерий Вальда требует в среднем меньше наблюдений, чем критерий Неймана-Пирсона с такими же вероятностями ошибок.

Теорема 1 (А.Вальд, Дж. Вольфиц)

Пусть $\psi = SPRT(c_0, c_1)$, $0 < c_0 < 1 < c_1 < \infty$, *и* ϕ *- произвольный последовательный критерий. Если для двух простых гипотез* H_0 *и* H_1

$$\alpha(\phi) \leq \alpha(\psi) \quad \beta(\phi) \geq \beta(\psi),$$

то

$$E_{0,\psi}(\nu) \leq E_{0,\phi}(\nu) \quad E_{1,\psi}(\nu) \leq E_{1,\phi}(\nu).$$

Иными словами, если ψ — последовательный критерий отношения правдоподобия с вероятностями ошибок первого и второго рода $\alpha = \alpha(\psi)$ и $\beta = \beta(\psi)$, тогда в классе всех последовательных критериев ϕ с вероятностями ошибок первого и второго рода такими, что $\alpha(\phi) \leq \alpha$ и $\beta(\phi) \geq \beta$, SPRT ψ минимизирует $E_{0,\phi}(\nu)$ и $E_{1,\phi}(\nu)$.

Лемма 2

Для любого последовательного критерия $\psi = SPRT(c_0, c_1)$, $0 < c_0 \leq c_1 < \infty$ *существует* δ: $0 < \delta < 1$ *и* $C < \infty$ *такие, что для любого* $n \in N$

$$Pr(\nu > n|H_0) \leq C(1-\delta)^n \quad Pr(\nu > n|H_1) \leq C(1-\delta)^n.$$

Из леммы 2 следует, что $E_{0,\psi}(\nu) < \infty$ и $E_{1,\psi}(\nu) < \infty$, т.е. с вероятностью, равной единице, процесс оканчивается либо выбором H_0, либо выбором H_1.

Лемма 3

Пусть $0 < c_0 < 1 < c_1 < \infty$. *Критические значения* c_0 *и* c_1 *последовательного критерия отношения правдободобия удовлетворяют неравенствам*

$$\alpha \leq \frac{1-\beta}{c_1} \leq \frac{1}{c_1}, \quad \beta \leq (1-\alpha)c_0 \leq c_0. \tag{7}$$

Неравенства (7) наводят на мысль об аппроксимации границ c_0, c_1, соотвествующих заданным α и β, величинами

$$c_0' = \frac{\beta}{1-\alpha}, \quad c_1' = \frac{1-\beta}{\alpha}.$$

В силу (7) вероятности в этой приближенной процедуре удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\beta'}{1-\alpha'} \leq c_0' = \frac{\beta}{1-\alpha} \quad \frac{1-\beta'}{\alpha'} \geq c_1' = \frac{1-\beta}{\alpha},$$

откуда

$$\alpha' \leq \frac{\alpha}{1-\beta} \quad \beta' \leq \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Если α и β имеют порядок от 0.001 до 0.1, то превышение α' над α и β' над β оказывается пренебрежимо малым. Единственный риск, связанный с употреблением приближенных границ, состоит в том, что α' и β' могут оказаться много меньше заданных знаечний, что приведет к существенному увеличению числа необходимых наблюдений. Однако есть основания надеяться, что это увеличиение будет умеренным.

Теорема 2 (Вальд)

Оценка снизу среднего числа наблюдений для любого последовательного критерия с вероятностями ошибок α и β имеет вид:

$$E_0\nu(\alpha,\beta) \geq -\frac{\omega(\alpha,\beta)}{E_{H_0}}, \quad E_1\nu(\alpha,\beta) \geq \frac{\omega(\beta,\alpha)}{E_{H_1}},$$

где

$$\omega(x,y) = \left((1-x)\ln\left(\frac{1-x}{y}\right) + x\ln\left(\frac{x}{1-y}\right)\right),$$

$$E_{H_j} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x)\ln\frac{f_1(x)}{f_0(x)}\mu(dx), \quad j=0,1.$$

Боровков А.А.Математическая статистика. — М.: Изд. Наука, 1984.

Вальд А.Последовательный анализ. — М.: Изд. ФМЛ.